Feuille de TD n° 6
Processus et martingales

pour la semaine du 14 au 18 novembre

Filtrations, temps d'arrêt

Exercice 1 (Temps d'arrêt). Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et T et S deux temps d'arrêt. Montrer que

1. $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ sont des temps d'arrêt.
2. Si T est un temps d'arrêt constant ($T = p$ avec $p \in \mathbb{N}$), alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_p$.
3. Si $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
4. $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
5. $\{S < T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, $\{S = T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
6. Si $(T_k)_{k\geq 0}$ est une suite de temps d'arrêt, alors $\limsup T_k$ et $\liminf T_k$ sont des temps d'arrêt.

Exercice 2. On considère une suite $(X_n,\, n \geq 0)$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[0, 1]$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\, k \leq n)$. On introduit la variable aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 1 : X_n > X_0\}.$$

1. Montrer que T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(F_n)_n$.
2. Déterminer la loi de T. *Conseil : calculer $\mathbb{P}(T > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 3 (Principe de réflexion). Soient $X_1, X_2, \dots$ de v.a. réelles iid de loi symétrique (càd $\mu_{X_1} = \mu_{-X_1}$). On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 0$. Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\max_{k\leq n} S_k \geq x) \leq 2\mathbb{P}(S_n \geq x).$$

Dans ce qui suit, on suppose toujours que $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ arbitraire. On introduit $T_x = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k \geq x\}$.

1. Montrer l'égalité des événements $\{T_x \leq n\} = \{\max_{k\leq n} S_k \geq x\}$. En déduire que T_x est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.
2. Montrer l'inclusion des événements $\{S_n \geq x\} \subset \{T_x \leq n\}$.
3. Montrer que
$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \geq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n - S_k \geq 0,\, T_x = k)$$
4. Montrer que la loi de $S_n - S_k$ est symétrique.
5. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$,
$$\mathbb{P}(S_n - S_k \geq 0 \,|\, \mathcal{F}_k) \geq 1/2.$$
6. Conclure.

Martingales

Exercice 4. Soient $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux sous-martingales. Montrer que $(M_n \vee N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une sous-martingale.

Exercice 5 (Décomposition de Doob d'une sous-martingale). Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale. Montrer qu'il existe un (p.s.) unique processus prévisible et croissant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(M_n - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et $A_0 = 0$.

Exercice 6 (Inégalité maximale pour les surmartingales positives). Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que si H est un processus prévisible, positif et borné, alors le processus $H \cdot X$ est encore une surmartingale.
2. Montrer que si T est un temps d'arrêt, alors $(X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une surmartingale (on pourra utiliser 1.).
3. On suppose maintenant que $(X_n)_{n\geq 0}$ est positive. Montrer que pour tout $a > 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X_0]}{a}.$$

Exercice 7 (Martingales de carrés intégrables). Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est de carré intégrable, i.e. $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $X_{-1} = 0$. Montrer que $\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(X_m - X_{m-1})] = 0$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.
2. Soit $-1 \leq m \leq n$. Montrer que $\mathbb{E}[(X_n - X_m)^2] = \sum_{i=m+1}^n \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^2]$.
3. Montrer l'équivalence entre les points suivants :
   (a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ (on dit dans ce cas que $(X_n)_{n\geq 0}$ est *bornée dans* L^2)
   (b) $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2] < \infty$

Exercice 8 (Processus de Galton–Watson). Soit $(X_n)_{n\geq 0}$, $X_0 = 1$, un processus de Galton–Watson de loi de reproduction μ d'espérance $m > 1$ et de variance $\sigma^2 < \infty$. On pose $W_n = X_n/m^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(W_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2 (par rapport à sa filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
Conseil : pour la bornitude dans L^2*, on pourra d'abord calculer* $\mathrm{Var}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (Variation quadratique d'une martingale). Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que $(M_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.
2. On note $\langle M\rangle$ l'unique (p.s.) processus prévisible et croissant tel que $(M_n^2 - \langle M\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et tel que $\langle M\rangle_0 = 0$ (cf. Exercice 5). On appelle $\langle M\rangle$ la *variation quadratique* de la martingale M. Montrer que
$$\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n = \mathrm{Var}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$
3. Montrer que $\mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M\rangle_n]$.
4. Soit T un temps d'arrêt. Montrer que $\langle M^T\rangle = \langle M\rangle^T$.
5. On suppose que $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. iid de carré intégrable et $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration canonique de M. Calculer $\langle M\rangle$.

Exercice 10 (Martingales exponentielles de la marche aléatoire). Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où $X_1, X_2, \ldots$ sont iid avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $W_n(\theta) = \exp(\theta S_n)/\cosh(\theta)^n$ est une martingale.

Exercice 11 (Processus de Poisson). Soit Π un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $\lambda > 0$. On définit pour $t \geq 0$, $N_t = \Pi((0,t])$. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration canonique de $(N_t)_{t\geq 0}$.

1. Montrer que $N_0 = 0$ et que pour tout $s \leq t$, $N_t - N_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ et de loi $\mathrm{Po}(\lambda(t-s))$.
2. Donner des fonctions $f(t)$, $g(t)$ et $h_\theta(t)$, $\theta \in \mathbb{R}$, telles que
$$(N_t - f(t))_{t\geq 0}, \quad ((N_t - f(t))^2 - g(t))_{t\geq 0} \quad \text{et} \quad (e^{\theta N_t - h_\theta(t)})_{t\geq 0}$$
sont des martingales.
3. Pour chacune des martingales de la dernière partie, étudier si elle converge ou non p.s. quand $t \to \infty$.