Feuille de TD n° 2

Indépendance de tribus, fonctions génératrices, sommes aléatoires, vecteurs gaussiens

pour vendredi 23 et jeudi 29 septembre

Exercice 1. On définit deux tribus sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A} = \sigma(\{x > 0\}, \{x = 0\}, \{x < 0\}) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \sigma(\{|x| \in B\};\ B \subset \mathbb{R}_+ \text{ mesurable}).$$

Caractériser toutes les mesures de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes.

Exercice 2. Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note $g_X(z) = \mathbb{E}[z^X]$ sa fonction génératice.

1. Montrer que $g_X(z)$ est une série de rayon de convergence au moins 1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{dz^n} g_X(z)\Big|_{z=1} = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)].$$

   On appelle ces quantités les *moments factoriels* de X.
3. Calculer les fonctions génératices des lois Poisson, binomiale et géométrique. *optionnel :* En déduire les moments factoriels de ces lois ainsi que l'espérance et la variance.

Exercice 3. Soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $X_1, X_2, \ldots$ une suite iid de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, indépendantes de N. Soit g_N la fonction génératrice de N et φ_X la fonction caractéristique de X_1. Calculer la fonction caractéristique de $\sum_{n=1}^{N} X_n$.

Exercice 4. Appliquer l'exercice précédent au cas où N est une variable de loi géométrique et X_1 est une variable de loi exponentielle ou géométrique. Pourquoi les deux résultats se ressemblent-ils ?

Exercice 5 (Loi multinomiale). Soit $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ un vecteur aléatoire de loi multinomiale de paramètres n et $p_1, \ldots, p_k$.

1. Calculer la fonction caractéristique $\varphi_{\vec{X}}(\vec{t})$ de $\vec{X}$. Utilisez le fait qu'on peut écrire

$$\vec{X} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{1}_{(Y^j=1)}, \ldots, \mathbf{1}_{(Y^j=k)}),$$

   avec $Y^1, \ldots, Y^n$ iid de loi $\mathbb{P}(Y^j = i) = p_i$.
2. Si $Y^1, Y^2, \ldots$ sont iid de même loi que ci-dessus et P est une v.a. indépendante de $(Y^1, Y^2, \ldots)$ de loi $\mathrm{Po}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, montrer que le vecteur aléatoire

$$\vec{S} := (S_1, \ldots, S_k) := \sum_{j=1}^{P} (\mathbf{1}_{(Y^j=1)}, \ldots, \mathbf{1}_{(Y^j=k)})$$

   suit la loi $\mathrm{Po}(\lambda p_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Po}(\lambda p_k)$.

Exercice 6. Soient $X = (X_1, \ldots, X_n)^T, Y = (Y_1, \ldots, Y_m)^T$ deux vecteurs aléatoires dans L^2. On note

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])^T] = (\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(Y_j - \mathbb{E}[Y_j])])_{i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,m\}},$$

appelée la *matrice de covariance croisée*. On récupère la matrice de covariance de X par $\Sigma_X = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$.

1. Quelles sont les dimensions de la matrice $\mathrm{Cov}(X, Y)$?
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(Y, X) = \mathrm{Cov}(X, Y)^T$.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(AX, Y)$, $\mathrm{Cov}(X, BY)$ et Σ_{AX}, où A, B sont des matrices réelles de dimensions convenables. *Conseil : On pourra utiliser les égalités $\mathbb{E}[AM] = A\mathbb{E}[M]$ et $\mathbb{E}[MB] = \mathbb{E}[M]B$ pour toute matrice aléatoire M et toutes matrices réelles A, B de dimensions convenables.*

4. Montrer que la matrice de covariance Σ_X est symétrique et positive, i.e. $v^T \Sigma_X v \geq 0$ pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$. Que cela implique-t-il sur les vecteurs propres et les valeurs propres de Σ_X ?
5. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $v^T X$ est dégénérée, i.e. presque sûrement égale à une constante, si et seulement si v est dans le noyau de Σ_X.

Exercice 7 (Vecteur gaussien standard). Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien standard n-dimensionnel, c'est-à-dire $X_1, \ldots, X_n$ sont iid de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Donner la loi de $\|X\|_2$.
2. On note $O(n)$ le groupe des transformations orthogonales $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $O \in O(n)$, OX est encore un vecteur gaussien standard n-dimensionnel.
3. On note σ^{n-1} la loi de $X/\|X\|_2$. C'est une mesure de probabilité sur la sphère S^{n-1}, appelée la *probabilité uniforme sur* S^{n-1}. Montrer que σ^{n-1} est invariante par l'action de tout $O \in O(n)$, i.e. $O(X/\|X\|_2)$ est égale en loi à $X/\|X\|_2$.
4. On souhaite montrer que $\|X\|_2$ et $X/\|X\|_2$ sont indépendantes. Pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on définit la mesure μ_f sur S^{n-1} par
$$\mu_f(B) = \mathbb{E}[f(\|X\|_2)\mathbf{1}_B(X/\|X\|_2)], \quad B \subset S^{n-1} \text{ mesurable.}$$
Montrer que la mesure μ_f est invariante par l'action de tout $O \in O(n)$, i.e. $\mu_f(B) = \mu_f(O^{-1}B)$ pour tout $B \subset S^{n-1}$ mesurable.
5. On admet que toute mesure sur S^{n-1} invariante par l'action de tout $O \in O(n)$ est un multiple de σ^{n-1} (une conséquence du *lemme de Christensen*). En déduire que pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée et tout $B \subset S^{n-1}$ mesurable, on a
$$\mathbb{E}[f(\|X\|_2)\mathbf{1}_B(X/\|X\|_2)] = \mathbb{E}[f(\|X\|_2)]\mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X/\|X\|_2)].$$
En déduire que $\|X\|_2$ et $X/\|X\|_2$ sont indépendantes.

Exercice 8 (Méthode Box–Muller). Soient U, W deux v.a. iid selon $\mathrm{Unif}([0, 1])$. Construire un vecteur gaussien standard deux-dimensionnel (X, Y) à partir de (U, W) en n'utilisant que les opérations suivantes : *addition, multiplication, racine carrée, logarithme, sinus, cosinus* et des constantes. Comparer (en vue d'application au calcul scientifique) cette méthode à la méthode “standard” qui consiste à poser $X = F^{-1}(U)$, où $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ ou $F(x) = \mathbb{P}(X \geq x)$.

Exercice 9 (Extrait du partiel 2013). Soit $(X, Y)^T$ un vecteur gaussien d'espérance $(1, 0)^T$ et de matrice de covariance
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
et S une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ indépendante de $(X, Y)^T$.

1. Quelle est la loi de $W = 2 + 2X - Y$?
2. Soient Z et T deux variables indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $(X, Y)^T$ a même loi que $(1 + Z, Z + T)^T$.
3. Quelle est la loi de $(X - 1)^2 + (Y - X + 1)^2 + S$?