Recueil d'exercices 2. Corrigé.

Exercice 1.

1. On note $Z_n = X_n + iY_n$. Alors $X_0 = x$, $Y_0 = y$ et

$$X_{n+1} + iY_{n+1} = X_n + iY_n + Y_n(\cos(U_{n+1}) + i\sin(U_{n+1})) = X_n + Y_n(\cos(U_{n+1}) + iY_n(1 + \sin(U_{n+1})).$$

Ceci montre que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ satisfait au système donné dans l'énoncé.

2. Pour montrons d'abord que Z_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$: Puisque $|\operatorname{Im}(Z_n)e^{iU_{n+1}}| \leq |Z_n|$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[|Z_{n+1}|] \leq \mathbb{E}[|Z_n|] + \mathbb{E}[|Z_n|] = 2\mathbb{E}[|Z_n|].$$

Par récurrence, Z_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc X_n et Y_n également.

Montrons que X_n et Y_n sont des martingales. Soit $U \sim \mathrm{Unif}(0, 2\pi)$. On remarque tout d'abord que si $U \sim \mathrm{Unif}(0, 2\pi)$, alors $\mathbb{E}[\cos(U)] = \mathbb{E}[\sin(U)] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}(\sin(2\pi) - \sin(0)) = 0,$$

et pareil pour sin. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_n \cos(U_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n] = Y_n\mathbb{E}[\cos(U_{n+1})] = 0$$
$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_n \sin(U_{n+1}) \,||, \mathcal{F}_n] = Y_n\mathbb{E}[\sin(U_{n+1})] = 0.$$

Il reste à montrer que $\operatorname{Im}(Z_n) > 0$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $\operatorname{Im}(Z_n) = Y_n = y\prod_{i=1}^n(1 + \sin(U_i))$ et $1 + \sin(U_i) > 0$ p.s. pour tout $i \geq 1$ et $y > 0$ par hypothèse.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = y\prod_{i=1}^n(1 + \sin(U_i)) \geq 0$, si bien que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale positive. Elle converge donc p.s. vers une limite $Y_\infty \geq 0$. Supposons que $\mathbb{P}(Y_\infty > 0) > 0$. Sur l'événement $\{Y_\infty > 0\}$, $Y_{n+1}/Y_n \to 1$ p.s., et donc $\mathbb{P}(Y_{n+1}/Y_n \to 1) > 0$. Or, $Y_{n+1}/Y_n = 1 + \sin(U_{n+1})$ et $\mathbb{P}(1 + \sin(U_{n+1}) \to 1) = 0$, car les v.a. $\sin(U_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ sont iid et de loi continue. Ceci montre que $\mathbb{P}(Y_\infty > 0) = 0$ et donc $Y_\infty = 0$ p.s.

La martingale n'est pas fermée car elle ne converge pas dans L^1 : $\mathbb{E}[Y_0] = y \neq 0 = \mathbb{E}[Y_\infty]$.

4. Par indépendance de U_{n+1} et $\mathcal{F}_n$, $\mathbb{E}[\sqrt{|X_{n+1} - X_n|} \,|\, \mathcal{F}_n] = \sqrt{Y_n}\mathbb{E}[\sqrt{\cos(U_{n+1})}]$, et donc

$$\mathbb{E}[\sqrt{|X_{n+1} - X_n|}] = \mathbb{E}[\sqrt{|\cos(U_{n+1})|}]\mathbb{E}[\sqrt{Y_n}] \leq y\mathbb{E}[\sqrt{1 + \sin(U)}]^n,$$

Puisque $1 + \sin(U)$ n'est pas une constante et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement concave, l'inégalité de Jensen donne,

$$r := \mathbb{E}[\sqrt{1 + \sin(U)}] < \sqrt{\mathbb{E}[1 + \sin(U)]} = 1.$$

Ceci donne $\mathbb{E}[\sqrt{|X_{n+1} - X_n|}] \leq yr^n$.

5. Par l'inégalité de Markov et la dernière partie,

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| \geq a^n) = \sum_n \mathbb{P}(\sqrt{|X_{n+1} - X_n|} \geq a^{n/2}) \leq \sum_n yr^n/a^{n/2} = y\sum_n y(r^2/a)^{n/2}.$$

Par hypothèse, cette somme est finie. Le lemme de Borel–Cantelli nous donne alors $\mathbb{P}(\limsup\{|X_{n+1} - X_n| \geq a^n\}) = 0$. Puisque $\sum_n a^n < \infty$, ceci montre que p.s., $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge p.s. vers une variable X_∞.

6. Puisque $Y_n \geq 0$ pour tout n, $|M_n(\lambda)| = e^{-|\lambda|Y_n} \leq 1$ pour tout n. En particulier, $(M_n(\lambda))_{n\geq 0}$ est un processus borné. Montrons que c'est une martingale :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}(\lambda) \,|\, \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\exp(i\lambda(X_n + Y_n\cos(U_{n+1})) - |\lambda|Y_n(1 + \sin(U_{n+1}))) \,|\, \mathcal{F}_n]\\ &= M_n(\lambda)\mathbb{E}[\exp(Y_n(i\lambda\cos(U_{n+1}) - |\lambda|\sin(U_{n+1}))) \,|\, \mathcal{F}_n].\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $\varphi(y,\lambda) = \mathbb{E}[\exp(y(i\lambda\cos(U) - |\lambda|\sin(U)))] = 1$ pour tout $y \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $\lambda \geq 0$, on a

$$\varphi(y,\lambda) = \mathbb{E}[\exp(iy\lambda(\cos(U) + i\sin(U)))] = \mathbb{E}[\exp(-iy\lambda e^{iU})] = 1,$$

Pour $\lambda < 0$, on a

$$\varphi(y,\lambda) = \mathbb{E}[\exp(iy\lambda(\cos(U) - i\sin(U)))] = \mathbb{E}[\exp(iy\lambda e^{-iU})] = \mathbb{E}[\exp(iy\lambda e^{iU})] = 1,$$

où l'avant-dernière égalité provient du fait que $e^{-iU} = e^{i(2\pi - U)} \overset{\text{loi}}{=} e^{iU}$, car $2\pi - U \overset{\text{loi}}{=} U$. Ceci montre que $M_n(\lambda)$ est une martingale bornée et converge donc p.s. et dans L^1. Puisque $Y_n \to 0$ p.s., la limite est égale à

$$\lim_n M_n(\lambda) = e^{i\lambda X_\infty}.$$

Ceci donne

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda X_\infty}] = \mathbb{E}[M_0(\lambda)] = e^{i\lambda x - |\lambda| y}.$$

Par conséquent, $X_\infty \overset{\text{loi}}{=} x + yC$, où C suit la loi de Cauchy standard.

7. Non, dans ce cas la martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ aurait convergé dans L^1, mais sa limite X_∞ n'est pas intégrable (il est bien connu que la loi de Cauchy ne l'est pas).

Exercice 2 (Algorithme de Metropolis).

1. Soit $x, y \in E$ distincts. Quitte à échanger le rôle de x et y, on peut supposer que $\pi(y) \leq \pi(x)$. Sachant que P est symétrique, on a alors

$$\frac{\pi(x)}{\pi(y)} Q(x,y) = \frac{Q(x,y)}{\alpha(x,y)} = P(x,y) = P(y,x) = \alpha(y,x)P(y,x) = Q(y,x),$$

de sorte que $\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)Q(y,x)$. On en déduit que la loi π est réversible pour Q et donc invariante.

2. On observe que pour tous $x, y \in E$ distincts, $P(x,y) > 0$ si et seulement si $Q(x,y) > 0$. Une simple récurrence sur $n \geq 1$ permet de montrer que pour tous $x, y \in E$ distincts, $P^n(x,y) > 0$ si et seulement si $Q^n(x,y) > 0$. Ainsi, comme P est irréductible, pour tous $x, y \in E$ distincts, il existe un entier $n \geq 1$ pour lequel on a $P^n(x,y) > 0$. Cela implique que $Q^n(x,y) > 0$ pour ce même entier, si bien que Q est aussi irréductible.

3. (a) Par l'absurde, supposons que pour tout $x_0 \in M$ et tout $y \in E \setminus M$, on a $P(x_0, y) = 0$. On en déduit que M et $E \setminus M$ ne communiquent pas, ce qui contredit l'irréductibilité de P. Ainsi, il existe un état $x_0 \in M$ tel que $P(x_0, y) > 0$ pour un certain $y \in E \setminus M$. On observe que $\pi(x_0) > \pi(y)$, donc

$$Q(x_0, y) = \alpha(x_0, y)P(x_0, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x_0)} P(x_0, y) < P(x_0, y).$$

On a $Q(x_0, z) \leq P(x_0, z)$ pour tout $z \in E \setminus \{x_0\}$, avec une inégalité stricte si $z = y$. D'où

$$\sum_{z \in E \setminus \{x_0\}} Q(x_0, z) < \sum_{z \in E \setminus \{x_0\}} P(x_0, z),$$

ce qui donne $Q(x_0, x_0) > P(x_0, x_0) \geq 0$.

(b) D'après la question précédente, $Q(x_0, x_0)$ est strictement positif, donc x_0 est de période 1. Comme Q est irréductible, on en déduit que Q est apériodique.

(c) La matrice Q est irréductible et récurrente positive (puisqu'il existe une probabilité invariante). Puisque Q est apériodique, pour tout $x \in E$, $\sum_{y \in E} |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \pi(y)|$ converge vers zéro, c'est-à-dire que la loi de X_n converge vers π.

4. Soit $X_1, \ldots, X_n$ simulés par l'algorithme. Montrons que pour tout $x, y \in E$, $\mathbb{P}(X_{i+1} = y | X_i = x) = Q(x,y)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{i+1} = y | X_i = x) &= \mathbb{P}(X_{i+1} = y, U \leq \alpha(X_i, V) | X_i = x) + \mathbb{P}(X_{i+1} = y, U > \alpha(X_i, V) | X_i = x) \\
&= \mathbb{P}(V = y, U \leq \alpha(x, V) | X_i = x) + \mathbb{P}(X_i = y, U > \alpha(x, V) | X_i = x) \\
&= \mathbb{P}(V = y, U \leq \alpha(x, y) | X_i = x) + \mathbb{1}_{\{x=y\}} \mathbb{P}(X_i = x, U > \alpha(x, V) | X_i = x) \\
&= \mathbb{P}(V = y | X_i = x)\mathbb{P}(U \leq \alpha(x, y)) + \mathbb{1}_{\{x=y\}} \mathbb{P}(U > \alpha(x, V) | X_i = x)
\end{aligned}$$

car U est indépendante de V et X_i. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{i+1} = y | X_i = x) &= P(x,y)\alpha(x,y) + \mathbb{1}_{\{x=y\}} \sum_{z\in E} \mathbb{P}(V = z, U > \alpha(x,z) | X_i = x) \\ &= P(x,y)\alpha(x,y) + \mathbb{1}_{\{x=y\}} \sum_{z\in E} \mathbb{P}(V = z | X_i = x)\mathbb{P}(U > \alpha(x,z)) \\ &= P(x,y)\alpha(x,y) + \mathbb{1}_{\{x=y\}} \sum_{z\in E} P(x,z)(1-\alpha(x,z)).\end{aligned}$$

Si $x \neq y$, cette quantité est égale à $P(x,y)\alpha(x,y) = Q(x,y)$. Si $x = y$, puisque $\alpha(x,x) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{i+1} = x | X_i = x) &= P(x,x)\alpha(x,x) + \sum_{z\in E} P(x,z)(1-\alpha(x,z)) = P(x,x) + \sum_{z\neq x} P(x,z)(1-\alpha(x,z)) \\ &= P(x,x) + \sum_{z\neq x} P(x,z) - \sum_{z\neq x} P(x,z)\alpha(x,z) = 1 - \sum_{z\neq x} Q(x,z) = Q(x,x).\end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, $\mathbb{P}(X_{i+1} = y | X_i = x) = Q(x,y)$, donc $X_1, \ldots, X_n$ admet Q pour transition.