Feuille de TD n° 2. Corrigé.

Exercice 1. On définit les classes suivantes

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \{x = 0\}, \{x > 0\}\}, \quad \mathcal{D} = \{\emptyset, \{|x| = 0\}\} \cup \{\{|x| \in B\};\, B \subset]0, \infty[\text{ mesurable}\}.$$

Alors ces classes sont stables par intersection et on a $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{D})$. Par un théorème du cours (conséquence du lemme des classes monotones), les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont alors indépendantes si et seulement si les quatre équations suivantes sont vérifiées :

$$\mathbb{P}(\{x = 0\} \cap \{|x| = 0\}) = \mathbb{P}(x = 0)\mathbb{P}(|x| = 0) \tag{1}$$
$$\mathbb{P}(\{x > 0\} \cap \{|x| = 0\}) = \mathbb{P}(x > 0)\mathbb{P}(|x| = 0) \tag{2}$$
$$\mathbb{P}(\{x = 0\} \cap \{|x| \in B\}) = \mathbb{P}(x = 0)\mathbb{P}(|x| \in B)\, \forall B \subset]0, \infty[\text{ mesurable} \tag{3}$$
$$\mathbb{P}(\{x > 0\} \cap \{|x| \in B\}) = \mathbb{P}(x > 0)\mathbb{P}(|x| \in B)\, \forall B \subset]0, \infty[\text{ mesurable.} \tag{4}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
(1) &\iff \mathbb{P}(x = 0) = \mathbb{P}(x = 0)^2 \iff \mathbb{P}(x = 0) \in \{0, 1\}\\
(2) &\iff 0 = \mathbb{P}(x > 0)\mathbb{P}(|x| = 0) \iff \mathbb{P}(x > 0) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(x = 0) = 0\\
(3) &\iff 0 = \mathbb{P}(x = 0)\mathbb{P}(|x| \in B)\, \forall B \subset]0, \infty[\text{ mesurable} \iff \mathbb{P}(x = 0) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(|x| > 0) = 0.
\end{aligned}$$

Les équations (1),(2),(3) sont alors vérifiées ssi $\mathbb{P}(x = 0) \in \{0, 1\}$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
(4) &\iff \mathbb{P}(x \in B) = \mathbb{P}(x > 0)\mathbb{P}(|x| \in B)\, \forall B \subset]0, \infty[\text{ mesurable}\\
&\iff \mathbb{P}(x \in B) = \mathbb{P}(x > 0)(\mathbb{P}(x \in B) + \mathbb{P}(-x \in B))\, \forall B \subset]0, \infty[\text{ mesurable}\\
&\iff (1 - \mathbb{P}(x > 0))\mathbb{P}(x \in B) = \mathbb{P}(x > 0)\mathbb{P}(-x \in B)\, \forall B \subset]0, \infty[\text{ mesurable.}
\end{aligned}$$

En conclusion, on a $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ssi $\mathbb{P}(x = 0) = 1$ ou $\mathbb{P}(x = 0) = 0$ et il existe $p \in [0, 1]$, tel que

$$(1 - p)\mathbb{P}(x \in B) = p\mathbb{P}(-x \in B)\, \forall B \subset]0, \infty[\text{ mesurable.}$$

Exercice 2.

1. Notons $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Puisque $g_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n=0}^\infty p_n z^n$ et $\sum p_n = 1$, la série converge pour tout $|z| \le 1$, et donc le rayon de convergence est d'au moins 1.
2. Puisque le rayon de convergence de la série $g_X(z)$ est au moins 1, on a pour tout $|z| < 1$,

$$\frac{d^n}{dz^n} g_X(z) = \sum_{k=0}^n p_k k(k-1)\cdots(k-1+1)z^{k-n} = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)z^{X-n}].$$

   En faisant tendre $z \uparrow 1$, on obtient alors par convergence monotone,

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dz^n} g_X(z)\Big|_{z=1} &= \lim_{z\uparrow 1} \frac{d^n}{dz^n} g_X(z)\\
&= \lim_{z\uparrow 1} \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)z^{X-n}]\\
&= \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)].
\end{aligned}$$

3. *Loi de Poisson :* Soit $P \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$. On a alors

$$g_P(z) = \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n z^n}{n!} = e^{\lambda(z-1)}.$$

   Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}[P(P-1)\cdots(P-n+1)] = \frac{d^n}{dz^n} g_P(z)\Big|_{z=1} = \lambda^n.$$

En particulier, $\mathbb{E}[P] = \lambda$, $\mathbb{E}[P^2] = \mathbb{E}[P(P-1)] + \mathbb{E}[P] = \lambda^2 + \lambda$, et donc $\mathrm{Var}(P) = \mathbb{E}[P^2] - \mathbb{E}[P]^2 = \lambda$.
Loi binomiale : Soit $B \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $p \in [0,1]$. Puisque B peut s'écrire comme la somme de n v.a. $\mathrm{Ber}(p)$ indépendantes, on a

$$g_B(z) = g_{\mathrm{Ber}(p)}(z)^n = ((1-p) + pz)^n.$$

Par conséquent, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}[B(B-1)\cdots(B-k+1)] = \frac{d^k}{dz^k} g_B(z)\Big|_{z=1} = p^k n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

En particulier, $\mathbb{E}[B] = np$, et donc

$$\mathrm{Var}(B) = \mathbb{E}[B(B-1)] + \mathbb{E}[B] - \mathbb{E}[B]^2 = p^2 n(n-1) + np - (np)^2 = np(1-p).$$

Loi géométrique : Soit $G \sim \mathrm{Geo}(p)$, $p \in (0,1]$. On a alors

$$\begin{aligned} g_G(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p z^n = pz \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n z^n = \frac{pz}{1-(1-p)z} = \frac{\frac{p}{1-p}((1-p)z - 1) + \frac{p}{1-p}}{1-(1-p)z} \\ &= -\frac{p}{1-p} + \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1}{1-(1-p)z} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}[G(G-1)\cdots(G-n+1)] = \frac{d^n}{dz^n} g_G(z)\Big|_{z=1} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)^n n!}{(1-(1-p)z)^{n+1}}\Big|_{z=1} = \frac{(1-p)^{n-1} n!}{p^n}.$$

En particulier, $\mathbb{E}[G] = 1/p$, et donc

$$\mathrm{Var}(G) = \mathbb{E}[G(G-1)] + \mathbb{E}[G] - \mathbb{E}[G]^2 = 2(1-p)/p^2 + 1/p - 1/p^2 = (1-p)/p^2.$$

Exercice 3. On a par indépendance, pour $\lambda \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{i\lambda \sum_{n=1}^N X_n}] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} e^{i\lambda(X_1+\cdots+X_n)} \mathbb{1}_{N=n}\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{i\lambda(X_1+\cdots+X_n)}]\mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_X(\lambda)^n \mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}[\varphi_X(\lambda)^N] = g_N(\varphi_X(\lambda)), \end{aligned}$$

et donc $\varphi_{\sum_{n=1}^N X_n} = g_N \circ \varphi_X$.
Exercice 4. Si $N \sim \mathrm{Geo}(p)$ et $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\beta)$, $p \in (0,1]$, $\beta > 0$, alors

$$g_N(\varphi_X(\lambda)) = \frac{p\frac{\beta}{\beta - i\lambda}}{1-(1-p)\frac{\beta}{\beta-i\lambda}} = \frac{p\beta}{\beta - i\lambda - (1-p)\beta} = \frac{p\beta}{p\beta - i\lambda}.$$

et donc $\sum_{n=1}^N X_n$ suit une loi exponentielle de paramètre $p\beta$.

De même, si $N \sim \mathrm{Geo}(p)$ et $X_1 \sim \mathrm{Geo}(q)$, $p,q \in (0,1]$, alors

$$g_N(\varphi_X(\lambda)) = \frac{p\frac{qe^{i\lambda}}{1-(1-q)e^{i\lambda}}}{1-(1-p)\frac{qe^{i\lambda}}{1-(1-q)e^{i\lambda}}} = \frac{pqe^{i\lambda}}{1-(1-q)e^{i\lambda} - (1-p)qe^{i\lambda}} = \frac{pqe^{i\lambda}}{1-(1-pq)e^{i\lambda}},$$

et donc $\sum_{n=1}^N X_n$ suit une loi géométrique de paramètre pq.

Les deux résultats se ressemblent parce que les lois géométriques et exponentielles possèdent tous les deux la propriété de *perte de mémoire*, i.e., si $G \sim \mathrm{Geo}(p)$, alors conditionnellement à $G > k$, on a encore $G - k \sim \mathrm{Geo}(p)$. De même, si $X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$, alors conditionnellement à $X > x$, on a encore $X - x \sim \mathrm{Exp}(\beta)$. C'est cette propriété qui se cache derrière ces résultats. D'ailleurs, de la même façon qu'une suite de variables géométrique peut être construite à partir d'une suite de v.a. Bernoulli indépendantes, une suite de v.a. exponentielles peut être construite à partir un analogue continu de la suite de v.a. Bernoulli : le *processus de Poisson homogène sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5 (Loi multinomiale).

1. Notons $\vec{X}^j = (\mathbf{1}_{(Y^j=1)}, \ldots, \mathbf{1}_{(Y^j=k)})$, si bien que $\vec{X} = \sum_{i=1}^n X^j$. Pour $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$, on a alors,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\vec{X}}(\vec{t}) &= \mathbb{E}[\prod_{i=1}^n e^{i\vec{t}\cdot\vec{X}^j}] \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{i\vec{t}\cdot\vec{X}^j}] && \text{par indépendance} \\
&= (\mathbb{E}[e^{i(t_1\mathbf{1}_{(Y^1=1)}+\cdots+t_k\mathbf{1}_{(Y^1=k)})}])^n \\
&= (p_1e^{it_1} + \cdots + p_ke^{it_k})^n
\end{aligned}$$

2. D'après l'exercice 3, la fonction caractéristique du vecteur $\vec{S}$ est égale à la composition de la fonction génératrice de la loi de Poisson, $g_\lambda(z) = e^{\lambda(z-1)}$, avec la fonction caractéristique du vecteur $(\mathbf{1}_{(Y^1=1)}, \ldots, \mathbf{1}_{(Y^1=k)})$ calculée ci-dessus (poser $n = 1$). Ceci donne

$$\varphi_{\vec{S}}(\vec{t}) = e^{\lambda(p_1e^{it_1}+\cdots+p_ke^{it_k}-1)} = \prod_{l=1}^k e^{\lambda p_l(e^{it_l}-1)},$$

car $\sum_{l=1}^k p_l = 1$. Il vient que le vecteur aléatoire suit la loi $\mathrm{Po}(\lambda p_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Po}(\lambda p_k)$, i.e. ses composantes sont indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $p_1\lambda, \ldots, p_k\lambda$.

Exercice 6.

1. $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est de dimension $n \times m$.
2. On a $\mathrm{Cov}(Y, X) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])(X - \mathbb{E}[X])^T] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])^T]^T = \mathrm{Cov}(X, Y)^T$.
3. On a

$$\mathrm{Cov}(AX, Y) = \mathbb{E}[(AX - \mathbb{E}[AX])(Y - \mathbb{E}[Y])^T] = \mathbb{E}[A(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])^T] = A\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Par conséquent, d'après la partie 2, $\mathrm{Cov}(X, BY) = \mathrm{Cov}(BY, X)^T = (B\,\mathrm{Cov}(Y, X))^T = \mathrm{Cov}(X, Y)B^T$. Ces deux formules donnent alors, $\Sigma_{AX} = \mathrm{Cov}(AX, AX) = A\,\mathrm{Cov}(X, X)A^T = A\Sigma_XA^T$.

4. On a d'après la partie 2, $\Sigma_X^T = \mathrm{Cov}(X, X)^T = \mathrm{Cov}(X, X) = \Sigma_X$, donc Σ_X est symétrique. De plus, on a pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, d'après la partie 3, en remarquant que v^TX est une v.a. réelle,

$$v^T\Sigma_Xv = \Sigma_{v^TX} = \mathrm{Var}(v^TX) \geq 0,$$

si bien que Σ_X est positive.

La symétrie de Σ_X implique qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que ses espaces propres sont orthogonaux, en particulier, il existe une base orthonormale de vecteurs propres de Σ_X. La positivité implique en plus que les valeurs propres sont positives.

5. On a d'après la partie 3, $\mathrm{Var}(v^TX) = v^T\Sigma_Xv$. Par conséquent,

$$v^TX \text{ est dégénérée} \iff \mathrm{Var}(v^TX) = 0 \iff v^T\Sigma_Xv = 0 \iff v \in \ker(\Sigma_X).$$

Ici, la dernière égalité peut-être démontrée par exemple en décomposant v selon une b.o.n. de vecteurs propres de Σ_X : Si $e_1, \ldots, e_n$ est une telle b.o.n., de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, et $v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$, alors $v^T\Sigma_Xv = \sum_{i=1}^n a_i^2\lambda_i$, et donc $v^T\Sigma_Xv = 0$ si et seulement si $a_i = 0$ pour tout i tel que $\lambda_i = 0$, ce qui signifie que $v \in \ker\Sigma_X$.

Exercice 7 (Vecteur gaussien standard).

1. On a $\|X\|_2^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$. Les variables X_i^2 sont iid de lois $\Gamma(1/2, 1/2)$, si bien que $\|X\|_2^2 \sim \Gamma(n/2, 1/2)$. On a alors pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\|X\|_2)] &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty f(\sqrt{x}) x^{n/2-1} e^{-x/2}\, dx \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty f(y) y^{n-2} e^{-y^2/2} 2y\, dy \\ &= \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty f(y) y^{n-1} e^{-y^2/2}\, dy.\end{aligned}$$

   Par conséquent, $\|X\|_2$ soit la loi de densité $\frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} y^{n-1} e^{-y^2/2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $O \in O(n)$. Alors OX est encore un vecteur gaussien. Notons que $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\Sigma_X = I$, la matrice d'identité. On a $\mathbb{E}[OX] = O\mathbb{E}[X] = 0$ et $\Sigma_{OX} = OIO^T = OO^T = I$. Puisque la loi d'un vecteur gaussien est déterminée par son espérance et sa matrice de covariance, OX est alors un vecteur gaussien standard n-dimensionnel.

3. Soit $O \in O(n)$. On sait depuis le dernier exercice que $OX \overset{\text{loi}}{=} X$. On a alors,

$$O(X/\|X\|_2) = (OX)/\|X\|_2 = (OX)/\|OX\|_2 \overset{\text{loi}}{=} X/\|X\|_2.$$

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, $B \subset S^{n-1}$ mesurable et $O \in O(n)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mu_f(O^{-1}B) &= \mathbb{E}[f(\|X\|_2)\mathbf{1}_{O^{-1}B}(X/\|X\|_2)] = \mathbb{E}[f(\|OX\|_2)\mathbf{1}_B(OX/\|OX\|_2)] \\ &= \mathbb{E}[f(\|X\|_2)\mathbf{1}_B(X/\|X\|_2)] = \mu_f(B),\end{aligned}$$

   par la partie 2 de l'exercice.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. On vient de montrer que μ_f est invariante par l'action de tout $O \in O(n)$. Par conséquent, il existe une constante c_f telle que $\mu_f = c_f \sigma^{n-1}$. On a

$$c_f = c_f \sigma^{n-1}(S^{n-1}) = \mu_f(S^{n-1}) = \mathbb{E}[f(\|X\|_2)].$$

   Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}[f(\|X\|_2)\mathbf{1}_B(X/\|X\|_2)] = \mu_f(B) = \mathbb{E}[f(\|X\|_2)]\sigma^{n-1}(B) = \mathbb{E}[f(\|X\|_2)]\mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X/\|X\|_2)].$$

   En prenant $f = \mathbf{1}_A$ pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ mesurable, on voit alors que $\|X\|_2$ et $X/\|X\|_2$ sont indépendantes.

Exercice 8 (Méthode Box–Muller). On sait d'après le dernier exercice qu'un vecteur gaussien standard 2-dimensionnel s'ecrit comme le produit RV, où R et V sont des v.a. indépendantes, R est à valeurs dans $(0, \infty)$, $R^2 \sim \Gamma(1, 1/2) = \mathrm{Exp}(1/2)$ et V est uniformément distribué sur le cercle S^1. Pour construire R, on remarque que si $F(x) = e^{-x}$ désigne la queue de la loi Exp(1) et W une v.a. uniforme sur l'intervalle $(0, 1)$, alors $F^{-1}(W) = -\log W \sim \mathrm{Exp}(1)$. Par conséquent, $2(-\log W) \sim \mathrm{Exp}(1/2)$ et donc R est égale en loi à $\sqrt{2(-\log W)}$. En ce qui concerne le vecteur aléatoire V, si $U \sim \mathrm{Unif}(0, 1)$, alors $2\pi U \sim \mathrm{Unif}(0, 2\pi)$, et donc V est égal en loi à $(\cos(2\pi U), \sin(2\pi U))$.

Résumant le dernier paragraphe : si on pose

$$(X, Y) = \sqrt{2(-\log W)}(\cos(2\pi U), \sin(2\pi U)),$$

alors (X, Y) est un vecteur gaussien standard 2-dimensionnel.

Cette méthode est nettement meilleure que la méthode par inversion de la fonction de répartition, car la fonction de répartition ne possède par de formule analytique. Elle devrait alors être calculée par des méthodes de quadrature de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-y^2/2}\, dy$, ce qui est plus couteux que les opérations ci-dessus.

Exercice 9 (Extrait du partiel 2013).

1. On a
$$W = 2 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$
et donc W est une transformation affine du vecteur gaussien $(X,Y)^T$ et donc une variable gaussienne. On a $\mathbb{E}[W] = 2 + 2 + 0 = 4$ et
$$\mathrm{Var}(W) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2,$$
donc $W \sim \mathcal{N}(4,2)$.
2. $(Z,T)^T$ est un vecteur gaussien de moyenne nulle et matrice de covariance Id. Par conséquent,
$$\begin{pmatrix} 1+Z \\ Z+T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix}$$
est également un vecteur gaussien, d'espérance $(1,0)^T$ et de matrice de covariance
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Sigma.$$
Ceci montre que $(1+Z, Z+T)^T$ et $(X,Y)^T$ ont même loi.
3. D'après la dernière partie, on a
$$(X-1)^2 + (Y-X+1)^2 \overset{\text{loi}}{=} Z^2 + T^2 \sim \Gamma(1, 1/2),$$
puisque Z^2 et T^2 sont iid de loi $\Gamma(1/2, 1/2)$. De plus, S suit la loi $\Gamma(1,1/2)$ et est indépendante de $(X,Y)^T$ par hypothèse. Par conséquent,
$$(X-1)^2 + (Y-X+1)^2 + S \sim \Gamma(2, 1/2).$$