Feuille de TD n° 8. Corrigé.

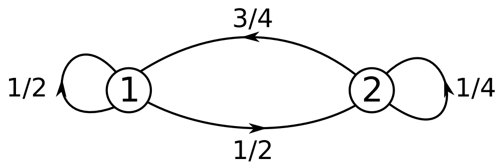

Figure 1 – Graphe décrivant la chaîne de Markov de l'Exercice 1.

Exercice 1.

1. D'après la description de $(X_n)_{n\geq 0}$, X_{n+1} ne dépend de $X_0, \dots, X_n$ qu'à travers X_n, plus précisément, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \,|\, X_0, \dots, X_n) = Q(X_n, y), \quad \text{où } Q = (Q(x,y))_{x,y=1,2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

   Par conséquent, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\{1,2\}$ de matrice de transition Q.

2. On a

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2) \\ &= Q(1,1)p_n + Q(2,1)(1-p_n) \\ &= -p_n/4 + 3/4. \end{aligned}$$

3. On cherche p_7 quand $p_0 = 1$. Par la relation de récurrence, on a

$$p_7 = p_0(-1/4)^7 + (3/4)\sum_{i=0}^{6}(-1/4)^i = (-1/4)^7 + \frac{3(1-(-1/4)^7)}{4(1-(-1/4))} = \tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{5}(-1/4)^7 \approx \tfrac{3}{5}.$$

4. Si $p_n = 3/5$, alors on a par la partie 2, $p_{n+1} = -(3/5)/4 + 3/4 = 3/4(1-1/5) = 3/5$. Par récurrence, on obtient alors que $p_0 = 3/5$ entraîne que $p_n = 3/5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Le coût moyen par jour se calcule

$$2 \times (3/5) + 4 \times (2/5) + 2 \times Q(1,2)(3/5) + 1 \times Q(2,1)(2/5) = (6 + 8 + 3 + 3/2)/5 = 17/5 = 3.4$$

   Il est alors de $3,40$ euros par jour.

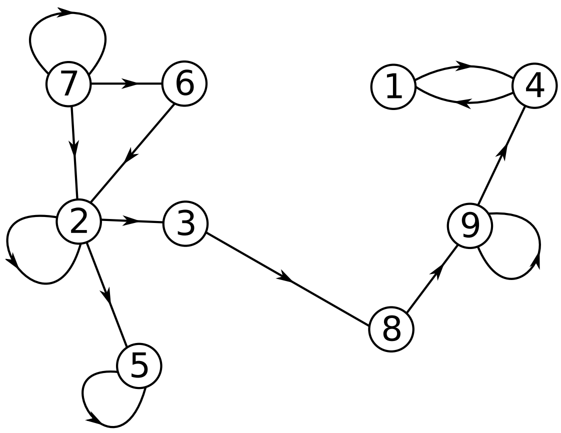

Figure 2 – Graphe décrivant la chaîne de Markov de l'Exercice 2. Les sommets correspondent aux états, les arêtes aux transitions entre états de probabilité non nulle.

Exercice 2. En inspectant la matrice de transition ou la Figure 2, on voit que 5 est un état absorbant et que les états 1 et 4 forment une classe de récurrence. Chacun des états restants communique avec 5 ou alors avec la classe {1,4}. Il en suit que les seules classes de récurrence sont $\{5\}$ et $\{1,4\}$, que les états restants sont transitoires et que 5 est le seul état absorbant.

Exercice 3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \{1,\dots,6\}$, $X_{n+1} = \max(X_n, \xi_{n+1})$, si bien que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = y \,|\, X_0,\dots,X_n) &= \mathbb{P}(\max(X_n,\xi_{n+1}) = y \,|\, X_0,\dots,X_n) \\ &= \begin{cases} 1/6 & \text{si } y > X_n \\ X_n/6 & \text{si } y = X_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} =: Q(X_n, y).\end{aligned}$$

L'état 6 est absorbant. Les états 1,…,5 communiquent avec 6 car $Q(x,6) > 0$ pour tout $x \in \{1,\dots,5\}$; par conséquent ils sont transitoires.

Pour trouver Q^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est difficile de le faire directement par calcul matriciel. Mieux vaut raisonner de manière probabiliste : Pour tout $x \le y$, on a

$$\mathbb{P}_x(X_n \le y) = \mathbb{P}(\max(\xi_1,\dots,\xi_n) \le y) = (y/6)^n.$$

De plus, $\mathbb{P}_x(X_n \le x-1) = 0$ pour tout $x = 1,\dots,6$ et $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a

$$Q^n(x,y) = \begin{cases} \mathbb{P}_x(X_n \le y) - \mathbb{P}_x(X_n \le y-1) = (y/6)^n - ((y-1)/6)^n & \text{si } y > x \\ \mathbb{P}_x(X_n \le x) = (x/6)^n & \text{si } y = x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4. Soit $Y_n = (X_n, n)$. Puisque Y_n et X_n sont des fonctions l'un de l'autre, on a alors $\sigma(Y_0,\dots,Y_n) = \sigma(X_0,\dots,X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = (y,m) \,|\, Y_0,\dots,Y_n) = \mathbb{P}((X_{n+1}, n+1) = (y,m) \,|\, X_0,\dots,X_n) = \begin{cases} Q_n(X_n,y) & \text{si } m = n+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, $(Y_n)_{n\ge 0}$ est un processus de Markov sur $E \times \mathbb{N}$ de matrice de transition

$$\widetilde{Q}\Big((x,n),(y,m)\Big) = \begin{cases} Q_n(x,y) & \text{si } m = n+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5. Notons $(X_n)_{n\ge 0}$ la chaîne de Markov de l'énoncé et $\widetilde{T}_0 = \inf\{n \ge 1 : X_n = 0\}$. Alors

$$\mathbb{P}_0(\widetilde{T}_0 > n) = \mathbb{P}(X_i = i \,\forall i \le n) = \prod_{i=1}^n p_i.$$

En prenant la limite $n \to \infty$, on obtient

$$\mathbb{P}_0(\widetilde{T}_0 = \infty) = \prod_{i=1}^\infty p_i.$$

Par conséquent, 0 est un état récurrent si et seulement si $\prod_{i=1}^\infty p_i = 0$.

Exercice 6.

1. Si $X_n + \xi_{n+1} \ge 1$, alors cela signifie qu'un client sera servi au temps $n+1$, donc $X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1} - 1 = (X_n + \xi_{n+1} - 1)^+$. En revanche, si $X_n + \xi_{n+1} = 0$, alors aucun client sera servi au temps $n+1$ et donc $X_{n+1} = 0 = (X_n + \xi_{n+1} - 1)^+$.
2. Par récurrence : pour $n = 0$, on a $X_0 = S_0 = S_0 - M_0$, car $M_0 = 0$. Supposons que c'est vrai pour un certain n. On a alors
$$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1} - 1)^+ = (S_n - M_n + \xi_{n+1} - 1)^+ = (S_{n+1} - M_n)^+.$$
On a alors deux cas possibles :
   (a) Si $S_{n+1} - M_n \ge 0$, alors $X_{n+1} = S_{n+1} - M_n$ et $M_{n+1} = \min(M_n, S_{n+1}) = M_n$.
   (b) Si $S_{n+1} - M_n < 0$, alors $X_{n+1} = 0$ et $M_{n+1} = \min(M_n, S_{n+1}) = S_{n+1}$.

Dans les deux cas, $X_{n+1} = S_{n+1} - M_{n+1}$.

3. Pour tout n, les variables $X_0, \dots, X_n$ sont mesurables par rapport à $\sigma(X_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Par conséquent, puisque ξ_{n+1} est indépendante de $\sigma(X_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ par hypothèse, elle est également indépendante de $\sigma(X_0, \dots, X_n)$ pour tout n. Par conséquent,
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \,|\, X_0, \dots, X_n) = \mathbb{P}((X_n + \xi_{n+1} - 1)^+ = y \,|\, X_0, \dots, X_n) = Q(X_n, y),$$
avec
$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \begin{cases} \mu(y+1-x) & \text{si } x \geq 1 \text{ ou } y \geq 1 \\ \mu(1) + \mu(0) & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 0 \end{cases} \\ &= \mu(y+1-x) + \mu(0)\mathbb{1}_{x=y=0}. \end{aligned}$$
Par conséquent, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov avec matrice de transition Q.
Pour montrer que la chaîne est irréductible, on remarque que $Q(x, x-1) = \mu(0) > 0$ pour tout $x \geq 1$, et donc $x \rightsquigarrow x-1$ pour tout $x \geq 1$. Par récurrence, cela donne $x \rightsquigarrow y$ pour tout $y < x$. De plus, puisque $\mu(k) > 0$ pour un $k \geq 2$, on a $Q(x, x+k-1) = \mu(k) > 0$ pour tout $x \geq 1$ et donc par récurrence $x \rightsquigarrow x + (k-1)n$ pour tout $x \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Si x et y sont arbitraires, posons $n = y + 1$, si bien que $x + (k-1)n > y$. Par ce qui précède, on a alors $x \rightsquigarrow x + (k-1)n \rightsquigarrow y$, si bien que $x \rightsquigarrow y$. La chaîne est alors irréductible.
4. Par la loi forte des grands nombres, on a $S_n/n \to \mathbb{E}[\xi_1 - 1]$ p.s. quand $n \to \infty$. Si $\mathbb{E}[\xi_1] > 1$, alors cela signifie que $S_n \to \infty$ p.s. Puisque $M_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après la seconde partie : $X_n \geq S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $X_n \to \infty$ p.s. quand $n \to \infty$.
5. On a pour tout $n \leq T$, $M_n = 0$. Par la second partie de l'exo, on a alors $X_n = S_n$ pour tout $n \leq T$.
Posons $X_0 = x \geq 1$. Montrons que $T < \infty$ p.s. Quand $\mathbb{E}[\xi_1] < 1$, ceci est une conséquence immédiate de la loi forte des grands nombres. Quand $\mathbb{E}[\xi_1] = 1$, considérons la martingale arrêtée S^T. Cette martingale est positive est converge donc p.s. vers une limite. Or, puisque p.s., S_n ne converge pas quand $n \to \infty$, cela implique que T doit être finie presque sûrement. Donc $T < \infty$ p.s. dans tous les cas.
Puisque $X_n = S_n$ pour $n \leq T$ et $T < \infty$ p.s., l'état 0 est atteint p.s. pour tout $X_0 = x \geq 1$. Ceci montre que $\widetilde{T}_0 < \infty$ p.s. et donc que 0 est récurrent. Par irréductibilité, ceci est vrai pour tous les états, et donc la chaîne est récurrente.

Exercice 7. Notons $(Z_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire sur l'arbre et posons $Y_n = d(\emptyset, Z_n)$, ou $d(\cdot,\cdot)$ est la distance dans l'arbre et $\emptyset$ est la racine de l'arbre. On vérifie alors aisément que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est encore une chaîne de Markov (sur $\mathbb{N}$) de matrice de transition
$$Q_Y(x,y) = (2/3)\mathbb{1}_{y=x+1} + (1/3)\mathbb{1}_{y=x-1} + (1/3)\mathbb{1}_{x=0,y=1}.$$
Cette chaîne de Markov ressemble beaucoup à la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ du dernier exercice si on prend $\mu(0) = 1/3$ et $\mu(2) = 2/3$ (si bien que $\mathbb{E}[\xi_1] = 4/3 > 1$). En effet, si on note Q_X la matrice de transition de cette chaîne, on a
$$Q_X(x,y) = (2/3)\mathbb{1}_{y=x+1} + (1/3)\mathbb{1}_{y=x-1} + (1/3)\mathbb{1}_{x=0,y=0},$$
si bien que $Q_X(x,y) = Q_Y(x,y)$ si $x \geq 1$ et quand $x = 0$, on a $Q_Y(0,1) = 1$ et $Q_X(0,1) = 2/3 = 1 - Q_X(0,0)$. Ceci implique qu'on peut plonger $(Y_n)_{n\geq 0}$ dans $(X_n)_{n\geq 0}$: définissons une suite de temps aléatoires $N_0, N_1, \dots$ par
$$N_0 = 0, \quad \text{et} \quad N_{n+1} = \begin{cases} N_n + 1 & \text{si } X_{N_n} \neq 0 \\ \inf\{k \geq N_n + 1 : X_k \neq 0\} & \text{si } X_{N_n} = 0. \end{cases}$$
On vérifie alors aisément que $(X_{N_n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q_Y et a donc même loi que $(Y_n)_{n\geq 0}$.

Le dernier exercice nous donne maintenant que $X_n \to +\infty$ p.s. quand $n \to \infty$. Par conséquent, $Y_n \to +\infty$ p.s. également et donc $(Y_n)_{n\geq 0}$ est transitoire.