Recueil d'exercices 1

Exercice 1 (Problème du collectionneur de coupons). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(Y_{n,m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées uniformément dans l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. Ainsi, pour tout entier $m \geq 1$, on peut dire que la variable $Y_{n,m}$ représente le choix d'un coupon parmi n possibles de façon uniforme et indépendante des choix effectués précédemment. Pour tout entier $k \in \{1,\dots,n\}$, notons alors

$$\tau_{n,k} = \inf\left\{m \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \mathrm{Card}\{Y_{n,1},\dots,Y_{n,m}\} = k\right\}$$

le temps mis pour collecter k coupons différents, et notons aussi $\tau_{n,0} = 0$. On s'intéresse au comportement asymptotique du temps $T_n = \tau_{n,n}$ mis pour obtenir tous les coupons possibles.

1. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, donner la loi de $X_{n,k} = \tau_{n,k} - \tau_{n,k-1}$. En déduire que, quand $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}[T_n] \sim n \ln n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(T_n) = \mathrm{O}(n^2).$$

2. À l'aide de l'inégalité de Chebyshev, montrer que

$$\frac{T_n}{n \ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Exercice 2 (Polynômes de Bernstein). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le polynôme de Bernstein de degré n associé à f est

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Montrer que $B_n(x) = \mathbb{E}[f(S_n(x)/n)]$, où $S_n(x)$ suit la loi binomiale de paramètres n et x.
2. En déduire, à l'aide de l'inégalité de Chebyshev, que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 3 (Variables aléatoires symétriques et fonctions caractéristiques).
La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite *symétrique* lorsque X et $-X$ ont même loi.

1. Montrer que la loi d'une v.a. réelle X est symétrique si et seulement si $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec φ_X la fonction caractéristique de X.
2. Soit Y une v.a. réelle et Z une v.a. indépendante de Y et de loi donnée par :

$$\mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z=-1).$$

   Montrer que la loi de $X = ZY$ est symétrique et que $\mu_X = \frac{1}{2}(\mu_Y + \mu_{-Y})$, où μ_X et μ_Y sont les lois respectives de X et Y. Calculer φ_X en fonction de φ_Y.
3. Soit X une v.a. suivant la loi de densité $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$ (dite la *loi de Laplace*). Montrer que $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. En déduire la fonction caractéristique d'une v.a. suivant une loi de Cauchy de paramètre 1 (densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$). Quelle est la loi de la moyenne arithmétique de deux v.a. indépendantes de loi de Cauchy de paramètre 1 ?
5. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des v.a. iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Rappeler leur fonction caractéristique. Calculer $\varphi_{X_1X_2}$, puis $\varphi_{X_1X_2+X_3X_4}$ et en déduire la loi de $X_1X_2 + X_3X_4$.

Exercice 4 (Loi bêta). Soient G_1, G_2 deux v.a. indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha_1,\beta)$ et $\Gamma(\alpha_2,\beta)$. Déterminer la loi de $G_1/(G_1+G_2)$, appelée la loi bêta de paramètres α_1 et α_2 et notée $B(\alpha_1,\alpha_2)$. En déduire les lois de $E_1/(E_1+E_2)$ et de $N_1^2/(N_1^2+N_2^2)$, où E_1, E_2 sont des variables exponentielles indépendantes et N_1, N_2 sont des gaussiennes centrées indépendantes. Pourquoi appelle-t-on la dernière la loi de l'arc sinus ?

Exercice 5. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. iid de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^n X_1 \cdots X_k$. Montrer que Y_n converge dans L^1 vers une v.a. Y.
2. Montrer que $Y \overset{\text{loi}}{=} X(1+Y)$, oú X est une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de Y.
3. Soit φ la fonction caractéristique de Y. Montrer l'égalité suivante :
$$\varphi(t) = \int_0^1 \varphi(tx)e^{itx}\,dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$
4. En déduire que $\varphi(t) = \exp(\int_0^t (e^{is}-1)/s\,ds)$, $t \geq 0$, puis donner une expression valable pour tout $t \in \mathbb{R}$. *Conseil : on pourra montrer que l'application $t \mapsto t\varphi(t)$ satisfait à une certaine équation différentielle et la résoudre.*

Exercice 6 (Théorème de Glivenko-Cantelli).

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on définit $F_n(x)$ par
$$F_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{Card}\{j \in \{1,\ldots,n\} \mid X_j \leq x\}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les $F_n(x)$ sont des variables aléatoires.

On considère ensuite la mesure de probabilité aléatoire
$$\Gamma_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{X_j}.$$

2. Montrer que F_n est la fonction de répartition de Γ_n.

Pour simplifier, on suppose à partir de maintenant que F est continue. L'objectif de la fin de l'exercice est de montrer qu'avec probabilité un, la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F, c'est-à-dire que
$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0 \qquad \text{où} \qquad V_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|.$$

On commence par supposer que $F(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

3. Quelle est la loi suivie par les variables X_n ? En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, avec probabilité un, $F_n(x)$ tend vers x quand $n \to \infty$.
4. Montrer que presque sûrement, la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers F.
5. Conclure, à l'aide du théorème de Dini, pour le cas où $F(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

On ne fait plus d'hypothèse sur la fonction F (autre que le fait qu'elle est continue). On pose $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$ pour tout $u \in [0,1]$.

6. Soit U une variable uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de $F^{-1}(U)$?
7. En déduire que V_n a même loi que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^{\text{unif}}(F(x)) - F(x)|,$$
où F_n^{unif} désigne la fonction F_n dans le cas où les variables X_n sont uniformes sur $[0,1]$, puis conclure.