Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 4. Corrigé.

Exercice 1. Par un théorème du cours, une famille $(Z_i)_{i\in I}$ de v.a. dans $\mathbb{R}^d$ est uniformément intégrable ssi

$$\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|Z_i\|]<\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\delta\to 0}\sup_{A:\mathbb{P}(A)<\delta}\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|Z_i\|\mathbb{1}_A]=0.$$

On a alors par l'inégalité triangulaire et par l'intégrabilité uniforme de $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$,

$$\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|X_i+Y_i\|]\le \sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|X_i\|]+\mathbb{E}[\|Y_i\|]\le \sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|X_i\|]+\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|Y_i\|]<\infty.$$

De même, on a pour tout $\delta>0$,

$$\begin{aligned}\sup_{A:\mathbb{P}(A)<\delta}\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|X_i+Y_i\|\mathbb{1}_A] &\le \sup_{A:\mathbb{P}(A)<\delta}\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|X_i\|\mathbb{1}_A]+\mathbb{E}[\|Y_i\|\mathbb{1}_A]\\ &\le \sup_{A:\mathbb{P}(A)<\delta}\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|X_i\|\mathbb{1}_A]+\sup_{A:\mathbb{P}(A)<\delta}\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|Y_i\|\mathbb{1}_A],\end{aligned}$$

si bien que par l'intégrabilité uniforme de $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$,

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{A:\mathbb{P}(A)<\delta}\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|X_i+Y_i\|\mathbb{1}_A]=0.$$

Le théorème ci-dessus montre alors que $(X_i+Y_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable.

Exercice 2. On a pour tout événement $A\in\mathcal{A}$,

$$\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|f(X_i)\|\mathbb{1}_A]\le \sup_{i\in I}\mathbb{E}[C(\|X_i\|+1)\mathbb{1}_A]\le C\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|X_i\|\mathbb{1}_A]+C\mathbb{P}(A).$$

En posant $A=\Omega$, ceci donne $\sup_{i\in I}\|f(X_i)\|_1\le C\sup_{i\in I}\|X_i\|_1+C<\infty$ puisque la famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable. De plus, on a

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{A\in\mathcal{A},\,\mathbb{P}(A)<\delta)}\mathbb{E}[\|f(X_i)\|\mathbb{1}_A]\le \lim_{\delta\to 0}\left(C\sup_{A\in\mathcal{A},\,\mathbb{P}(A)<\delta)}\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\|X_i\|\mathbb{1}_A]+C\delta\right)=0,$$

toujours parce que la famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable. Par conséquent, la famille $(f(X_i))_{i\in I}$ l'est aussi.

Exercice 3. 1. $\Rightarrow$ 2. : Convergence dans L^p implique convergence en probabilité. Pour l'intégrabilité uniforme, on remarque que pour tout n et tout événement A, on a d'après l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}[\|X_n\|^p\mathbb{1}_A])^{1/p}&=\|X_n\mathbb{1}_A\|_p\\ &=\|(X_n-X+X)\mathbb{1}_A\|_p\\ &\le \|(X_n-X)\mathbb{1}_A\|_p+\|X\mathbb{1}_A\|_p\\ &\le \|X_n-X\|_p+(\mathbb{E}[\|X\|^p\mathbb{1}_A)^{1/p}.\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $\|X_n-X\|_p\to 0$ quand $n\to\infty$. En particulier, en utilisant l'inégalité précédente avec $A=\Omega$, on a $\sup_n\mathbb{E}[\|X_n\|^p]<\infty$.

Fixons $\varepsilon>0$. Alors il existe $N\in\mathbb{N}^*$, tel que $\|X_n-X\|_p<\varepsilon/2$ pour tout $n\ge N$. De plus, puisque $\|X\|^p$ est intégrable par hypothèse, donc uniformément intégrable, il existe $\delta'>0$, tel que $(\mathbb{E}[\|X\|^p\mathbb{1}_A)^{1/p}<\varepsilon/2$ pour tout événement A avec $\mathbb{P}(A)<\delta'$. Pour la même raison, il existe $\delta''>0$, tel que $(\mathbb{E}[\|X_n\|^p\mathbb{1}_A)^{1/p}<\varepsilon$ pour tout $n<N$ et tout événement A avec $\mathbb{P}(A)<\delta''$. Avec l'inégalité en haut, cela donne avec $\delta=\min(\delta',\delta'')$,

$$\sup_{A:\mathbb{P}(A)<\delta}\sup_{n\in\mathbb{N}^*}(\mathbb{E}[\|X_n\|^p\mathbb{1}_A])^{1/p}\le\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Par un théorème du cours, ceci montre que la famille $(\|X_n\|^p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément intégrable.

2. $\Rightarrow$ 1. : Montrons d'abord que $X\in L^p$: Puisque $X_n\to X$ en probabilité, il existe une sous-suite $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que X_{n_k} converge p.s. vers X. En particulier, $\|X_{n_k}\|^p\to\|X\|^p$ p.s. Par le lemme de Fatou, on a alors

$$\mathbb{E}[\|X\|^p]\le\liminf_{k\to\infty}\mathbb{E}[\|X_{n_k}\|^p]<\infty,$$

par l'intégrabilité uniforme de la famille $(\|X_n\|^p)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ceci montre que $X \in L^p$.

Montrons que $X_n \to X$ dans L^p. On fixe $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité de Minkowski, on a

$$\begin{aligned}\|X_n - X\|_p &\le \|(X_n - X)\mathbb{1}_{\|X_n-X\|\le\varepsilon}\|_p + \|(X_n - X)\mathbb{1}_{\|X_n-X\|>\varepsilon}\|_p \\ &\le \varepsilon + \|X_n\mathbb{1}_{\|X_n-X\|>\varepsilon}\|_p + \|X\mathbb{1}_{\|X_n-X\|>\varepsilon}\|_p\end{aligned}$$

Posons $X_0 = X$. La famille $(\|X_n\|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors uniformément intégrable puisque l'union de deux familles uniformément intégrables l'est encore. Par un théorème du cours, il existe alors $\delta > 0$, tel que pour tout événement A tel que $\mathbb{P}(A) < \delta$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\mathbb{1}_A\|_p = (\mathbb{E}[\|X_n\|^p\mathbb{1}_A])^{1/p} < \varepsilon.$$

De plus, par la convergence en probabilité $X_n \to X$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \ge N$, $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) < \delta$. Par ce qui précède, on a finalement, pour $n \ge N$,

$$\|X_n - X\|_p \le \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ était arbitraire, ceci montre que $\|X_n - X\|_p \to 0$ et donc $X_n \to X$ dans L^p.

Exercice 4. Montrons que $|a - b| = a + b - 2\min(a, b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: on peut supposer que $a \ge b$, sinon on échange les rôles de a et b. On a alors $|a - b| = a - b$ et $a + b - 2\min(a, b) = a + b - 2b = a - b$. Ceci montre l'égalité.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] = \mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X_\infty] - 2\mathbb{E}[\min(X_n, X_\infty)].$$

Puisque $0 \le \min(X_n, X_\infty) \le X_\infty$ pour tout n et X_∞ est intégrable, on a par convergence dominée,

$$\mathbb{E}[\min(X_n, X_\infty)] \to \mathbb{E}[X_\infty].$$

De plus, par hypothèse, $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X_\infty]$ quand $n \to \infty$. Il en suit que $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] \to \mathbb{E}[X_\infty] + \mathbb{E}[X_\infty] - 2\mathbb{E}[X_\infty] = 0$, ce qui permet de conclure.

Exercice 5. *Calcul direct :* Soit $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}(np_n)^k\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{n-k} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

Ceci montre que $X_n \Rightarrow \mathrm{Po}(\lambda)$.

Fonctions génératrices : On a pour $|z| \le 1$,

$$g_{\mathrm{Bin}(n,p_n)}(z) = (1 - p_n + p_n z)^n = \left(1 - \frac{(z-1)np_n}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{(z-1)\lambda}.$$

Ceci est la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre λ. Par le théorème de Lévy (ou alors par le simple fait que convergence d'une suite de séries implique convergence des coefficients), on en déduit que $X_n \Rightarrow \mathrm{Po}(\lambda)$.

Exercice 6. *Calcul direct :* On a pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(pX_p > x) = \mathbb{P}(X_p \ge \lfloor x/p\rfloor + 1) = p\sum_{k=\lfloor x/p\rfloor+1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = (1-p)^{\lfloor x/p\rfloor} p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k \xrightarrow{p\to 0} e^{-x},$$

car $p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = 1$. Ceci montre que la fonction de répartition de pX_p tend vers celle de la loi exponentielle de paramètre 1 quand $p \to 0$, ce qui entraine la convergence en loi de pX_p vers cette loi exponentielle.

Fonctions caractéristiques : On sait que la fonction génératrice de X_p s'écrit

$$\mathbb{E}[z^{X_p}] = \frac{pz}{1-(1-p)z}, \quad |z| \le 1.$$

On applique cela avec $z = e^{i\lambda p}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pour obtenir

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda p X_p}] = e^{i\lambda p}\frac{p}{1-(1-p)e^{i\lambda p}} = e^{i\lambda p}\frac{p}{1-(1-p)(1+i\lambda p+o(p))} \xrightarrow{p\to 0} \frac{1}{1-i\lambda}.$$

On identifie cela avec la fonction caractéristique de la loi exponentielle de paramètre 1. Par le théorème de Lévy, on en déduit que $pX_p \Rightarrow \mathrm{Exp}(1)$.

Exercice 7. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max(X_1,\dots,X_n) - \log n \le x) &= \mathbb{P}(\max(X_1,\dots,X_n) \le x + \log n)\\ &= \mathbb{P}(X_1 \le x + \log n)^n\\ &\overset{\log n \ge -x}{=} (1 - e^{-x-\log n})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \to e^{-e^{-x}}, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Puisque convergence des fonctions de répartitions implique convergence en loi, ceci montre que $\max(X_1,\dots,X_n) - \log n$ converge en loi vers la loi de fonction de répartition $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ (appelée la loi de *Gumbel*).

Exercice 8. Soit g une fonction continue bornée. Alors la composée $g \circ f$ est encore continue et bornée. Par conséquent,

$$\mathbb{E}[g(f(X_n))] = \mathbb{E}[(g\circ f)(X_n)] \to \mathbb{E}[(g\circ f)(X)] = \mathbb{E}[g(f(X))],$$

quand $n \to \infty$, par la convergence en loi de X_n vers X. Puisque g était arbitraire, ceci implique que $f(X_n) \Rightarrow f(X)$.

Exercice 9. Par le théorème de représentation de Skorokhod, on peut construire les v.a. $X_1, X_2, \dots$ et X sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que $X_n \to X$ p.s. Fixons f comme dans l'énoncé et notons A l'événement que f est continue en X. Alors par hypothèse et le théorème de transfert, on a $\mathbb{P}(A) = 1$. Notons en plus C l'événement que $X_n \to X$ quand $n \to \infty$, si bien que $\mathbb{P}(C) = 1$. On a alors $f(X_n) \to f(X)$ sur $A \cap C$. Par le théorème de convergence dominée, on a alors, quand $n \to \infty$, pour toute fonction g continue bornée,

$$\mathbb{E}[g(f(X_n))] = \mathbb{E}[g(f(X_n))\mathbb{1}_{A\cap C}] \to \mathbb{E}[g(f(X))\mathbb{1}_{A\cap C}] = \mathbb{E}[g(f(X))].$$

Ceci montre que $f(X_n) \to f(X)$ en loi.

Exercice 10. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{i\langle \lambda, (X_n^{(1)},\dots,X_n^{(k)})\rangle}] &= \mathbb{E}[e^{i\lambda_1 X_n^{(1)}} \cdots e^{i\lambda_k X_n^{(k)}}]\\ &= \mathbb{E}[e^{i\lambda_1 X_n^{(1)}}] \cdots \mathbb{E}[e^{i\lambda_k X_n^{(k)}}] && \text{par indépendance}\\ &\xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{i\lambda_1 X^{(1)}}] \cdots \mathbb{E}[e^{i\lambda_k X^{(k)}}] && \text{par hypothèse}\\ &= \mathbb{E}[e^{i\lambda_1 X^{(1)}} \cdots e^{i\lambda_k X^{(k)}}] && \text{par indépendance}\\ &= \mathbb{E}[e^{i\langle \lambda, (X^{(1)},\dots,X^{(k)})\rangle}].\end{aligned}$$

Le théorème de Lévy donne alors la convergence en loi de $(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)})$ vers $(X^{(1)}, \dots, X^{(k)})$ quand $n \to \infty$.

Exercice 11 (Lois stables).

1. On a $|e^{i\lambda x} - 1| \le 2$ et $|i\lambda x| = \lambda|x|$ pour tout $x, \lambda \in \mathbb{R}$. Pour l'intégrabilité, il suffit alors de montrer que $\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)f(x)\,dx < \infty$. Mais,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)f(x)\,dx &= 1 + \int_{\mathbb{R}} |x|f(x)\,dx && \text{car } \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1\\ &= 1 + 2\int_0^\infty x f(x)\,dx && f \text{ paire}\\ &\le 1 + 2(1 + \int_1^\infty \frac{c_\alpha}{x^\alpha}\,dx) && \text{car } \int_0^1 f(x)\,dx \le 1\\ &< \infty && \text{puisque } \alpha > 1.\end{aligned}$$

En ce qui concerne l'expression pour φ_X, on note encore que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$ et aussi $\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = 0$, puisque f est paire. Par conséquent,

$$\varphi_X(\lambda) - 1 = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} f(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} i\lambda x f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x) f(x)\,dx.$$

2. Soit $\lambda \neq 0$. En faisant un changement de variable $x \mapsto x/\lambda$, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_X(\lambda) - 1 &= \int_{\mathbb{R}} (e^{ix} - 1 - ix) \frac{c_\alpha}{1 + |x/\lambda|^{\alpha+1}} \frac{dx}{|\lambda|} \\ &= |\lambda|^\alpha \int_{\mathbb{R}} (e^{ix} - 1 - ix) \frac{c_\alpha}{|\lambda|^{\alpha+1} + |x|^{\alpha+1}}\, dx \\ &= |\lambda|^\alpha \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(x)\, dx, \quad \text{avec } g_\lambda(x) = (e^{ix} - 1 - ix) \frac{c_\alpha}{|\lambda|^{\alpha+1} + |x|^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

Alors $g_\lambda(x) \to g_0(x) = (e^{ix} - 1 - ix) \frac{c_\alpha}{|x|^{\alpha+1}}$ quand $\lambda \to 0$. De plus, puisque $|e^{ix} - 1 - ix| = O(x^2)$ quand $x \to 0$ et $= O(x)$ quand $x \to \infty$, il existe une constante C telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : |g_\lambda(x)| \leq C \min(|x|^2, |x|) \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} = C \min(|x|^{-(\alpha-1)}, |x|^{-\alpha}) =: G(x).$$

Puisque $\alpha \in (1, 2)$, on a $\int_1^\infty x^{-\alpha}\, dx < \infty$ et $\int_0^1 x^{-(\alpha-1)}\, dx < \infty$, si bien que $G(x)$ est intégrable. Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\frac{\varphi_X(\lambda) - 1}{|\lambda|^\alpha} = \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}} g_0(x)\, dx, \quad \lambda \to 0.$$

Il reste à montrer que $\int_{\mathbb{R}} g_0(x)\, dx$ est un réel strictement négatif. En effet, puisque $g_0(-x) = g_0(x)^*$, on a $\int g(x)\, dx = 2\Re \int_0^\infty g(x), dx$. De plus, puisque $\Re e^{ix} \leq 1$, on a $\Re g(x) \leq 0$ pour tout x et même < 0 pour Lebesgue-presque tout x. Par conséquent, $\int g_0(x)\, dx$ est bien un réel strictement négatif.

3. Par indépendance des X_n, on a

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda S_n/n^{1/\alpha}}] = \varphi(\lambda/n^{1/\alpha})^n = \exp(n \log \varphi(\lambda/n^{1/\alpha})).$$

Puisque $\varphi(\lambda) \to 1$ quand $\lambda \to 0$, on a l'équivalent

$$\log(\varphi(\lambda/n^{1/\alpha})) \sim (\varphi(\lambda/n^{1/\alpha}) - 1) \sim -\frac{C|\lambda|^\alpha}{n}, \quad n \to \infty.$$

Il vient que

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda S_n/n^{1/\alpha}}] \to \exp(-C|\lambda|^\alpha), \quad n \to \infty.$$

4. La fonction $\lambda \to \exp(-C|\lambda|^\alpha)$ est une limite de fonctions caractéristiques de lois de probabilité sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est continue en 0. Par le théorème de Lévy, elle est alors la fonction caractéristique d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$.

5. Pour tout $a, b > 0$, on obtient

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda(aY+bY')}] = \exp(-|a\lambda|^\alpha - |b\lambda|^\alpha) = \exp(-|(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}\lambda|^\alpha) = \mathbb{E}[e^{i\lambda(a^\alpha+b^\alpha)^{1/\alpha}Y}].$$

Puisque les fonctions caractéristiques déterminent les lois, cela montre l'égalité en loi

$$aY + bY' \stackrel{\text{loi}}{=} (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} Y$$

Les lois 2-stables que nous connaissons sont les lois gaussiennes centrées.

Exercice 12. On a

$$\begin{aligned}A_{2n} - A_n = \frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} - \frac{S_n}{\sqrt{n}} &= \frac{(X_1 + \cdots + X_{2n})/\sqrt{2} - (X_1 + \cdots + X_n)}{\sqrt{n}} \\ &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{X_{n+1} + \cdots + X_{2n}}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Les deux sommands de la dernière ligne sont indépendants et convergent en loi vers des gaussiennes centrées de variances respectives $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2$ et $1/2$, d'après le TCL. Par les exercices 9 et 8, $A_{2n} - A_n$ converge alors en loi vers une gaussienne de variance $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + 1/2$, donc ne peut converger vers 0 en loi, ni en probabilité (car la convergence en probabilité implique convergence en loi). Ceci implique que $A_n = S_n/\sqrt{n}$ ne converge pas en probabilité, car si Y_n est une suite de v.a. qui converge en probabilité vers une v.a. Y, alors $|Y_{2n} - Y_n| \leq |Y_{2n} - Y| + |Y_n - Y|$, ce qui converge vers 0 en probabilité.

Exercice 13. Par le théorème central limite, on sait que $\frac{S_n-\mu n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$, quand $n \to \infty$. Par l'exercice 8 de cette feuille, on en déduit que $\left(\frac{S_n-\mu n}{\sqrt{n}}\right)^2$ converge également en loi vers N^2, ou $N \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$. Par le théorème de représentation de Skorokhod, on peut construire un certain espace de probabilité avec des v.a. $Y_1, Y_2, \dots$ et Y telles que Y_n est égale en loi à $\left(\frac{S_n-\mu n}{\sqrt{n}}\right)^2$ pour tout n, Y est égale en loi à N^2, et $Y_n \to Y$ presque sûrement quand $n \to \infty$. De plus, on a pour tout n,

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}}\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}[N^2] = \mathbb{E}[Y],$$

et donc, *a fortiori*, $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[Y]$. Par le lemme de Scheffé, on a alors $Y_n \to Y$ dans L^1. En particulier, la famille $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément intégrable. Puisque l'intégrabilité uniforme ne dépend que des lois marginales de la famille, on en déduit que la famille de v.a. $\left(\frac{S_n-\mu n}{\sqrt{n}}\right)^2$ est également uniformément intégrable.

Exercice 14 (Problème des allumettes de Banach).

1. Notons 0 la boîte dans la poche de gauche et l'autre, 1. On formalise le problème de manière suivante : on suppose qu'on fait une infinité de tirages, c'est-à-dire on se donne une suite iid de v.a. $(B_n)_{n\geq 1}$ de lois $\mathrm{Ber}(1/2)$. Ici, B_n donne la boîte de laquelle on tire la n-ième allumette. Soit N_k^0 l'index du k-ième 0 et N_k^1 l'index du k-ième 1. Notons $Y_k^i = N_k^{1-i} - N_{k-1}^{1-i}$ et notons que $(Y_k^i)_{k\geq 1}$ est une suite iid de v.a. de loi géométrique de paramètre 1/2 pour chaque $i = 0, 1$. L'événement A_n^i que le fumeur ait pris n allumettes de la boîte $1-i$ avant d'en prendre n de la boîte i s'écrit alors
$$A_n^i = \{N_n^{1-i} < 2n\} = \left\{\sum_{k=1}^n Y_k^i < 2n\right\}, \quad i = 0, 1.$$
Notons que les deux événements sont disjoints et leur union est Ω, car
$$\begin{aligned} A_n^i &= \{N_n^{1-i} < 2n\} \\ &= \{\mathrm{Card}\{1 \leq k < 2n : B_k = 1-i\} \geq n\} \\ &= \{\mathrm{Card}\{1 \leq k < 2n : B_k = i\} < n\} \\ &= \{N_n^i \geq 2n\} \\ &= (A_n^{1-i})^c. \end{aligned}$$
Puisque $N_n^{1-i} - n$ est le nombre d'allumettes prisent dans la boite i au moment ou la n-ième allumette est prise de la boîte $1-i$, la variable recherchée X_n est alors $X_n = 2n - N_n^{1-i} = 2n - \sum_{k=1}^n Y_k^i$ sur l'événement A_n^i.
2. On a pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_n)] &= \mathbb{E}[f(X_n)\mathbb{1}_{A_n^0}] + \mathbb{E}[f(X_n)\mathbb{1}_{A_n^1}] \\ &= \mathbb{E}\left[f\left(2n - \sum_{k=1}^n Y_k^0\right)\mathbb{1}_{2n-\sum_{k=1}^n Y_k^0>0}\right] + \mathbb{E}\left[f\left(2n - \sum_{k=1}^n Y_k^1\right)\mathbb{1}_{2n-\sum_{k=1}^n Y_k^1>0}\right] \\ &= 2\mathbb{E}\left[f\left(2n - \sum_{k=1}^n Y_k^0\right)\mathbb{1}_{2n-\sum_{k=1}^n Y_k^0>0}\right], \end{aligned}$$
car les suites $(Y_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Y_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ ont même loi. En particulier,
$$\mathbb{E}[f(X_n/\sqrt{n})] = 2\mathbb{E}\left[f\left(\frac{2n - \sum_{k=1}^n Y_k^0}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{1}_{\frac{2n-\sum_{k=1}^n Y_k^0}{\sqrt{n}}>0}\right].$$
Pour établir la convergence, on utilise le TCL. On a $\mathbb{E}[Y_1^0] = 2$ et $\mathrm{Var}(Y_1^0) = (1-1/2)/(1/2)^2 = 2$. Par le TCL, $\frac{2n-\sum_{k=1}^n Y_k^0}{\sqrt{n}}$ converge alors en loi quand $n \to \infty$ vers $N \sim \mathcal{N}(0, 2)$.
Notons qu'on peut supposer que $f(0) = 0$, quitte à considérer la fonction $f - f(0)$. Alors la fonction $x \mapsto f(x)\mathbb{1}_{x>0}$ est encore continue et bornée. On obtient alors
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n/\sqrt{n})] = 2\mathbb{E}[f(N)\mathbb{1}_{N>0}] = \mathbb{E}[f(|N|)],$$
par symétrie de la loi gaussienne. On en conclut que $X_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers $|N|$.

3. D'après l'exercice précédent, la famille de v.a. $\left(\left(\frac{2n-\sum_{k=1}^n Y_k^{(1)}}{\sqrt{n}}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est u.i., et donc, d'après la preuve de la partie précédente, la famille $\left((X_n/\sqrt{n})^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ également. Par l'exercice 2 de cette feuille (appliqué à $f(x) = \sqrt{x}\mathbb{1}_{x\geq 1}$) la famille $(X_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est encore. Par conséquent, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n/\sqrt{n}] = \mathbb{E}[|N|] = \frac{2}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty xe^{-x^2/4}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}[-e^{-x^2/4}]_0^\infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$
Donc, $\mathbb{E}[X_n] \sim (2/\sqrt{\pi})\sqrt{n}$ quand $n\to\infty$.

Exercice 15. On définit la matrice V de dimensions $k\times n$ par
$$V = (v_1|\cdots|v_k)^T.$$
On cherche alors la loi du vecteur VX. Puisque X est un vecteur gaussien, VX est également un vecteur gaussien. Son espérance vaut $\mathbb{E}[VX] = V\mathbb{E}[X] = V\mu$. Quant à la matrice de covariance, on note d'abord que
$$\Sigma_X V^T = \Sigma_X(v_1|\cdots|v_k) = (\lambda_1 v_1|\cdots|\lambda_k v_k) = V^T\Lambda,$$
où
$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_k).$$
De plus, on a $VV^T = \mathrm{Id}$ puisque la famille $v_1,\dots,v_k$ est orthonormale. Par conséquent,
$$\Sigma_{VX} = V\Sigma_X V^T = VV^T\Lambda = \Lambda.$$
On conclut alors que $VX \sim \mathcal{N}(V\mu,\Lambda)$.

Exercice 16. Soient $p_1,\dots,p_k > 0$ tels que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. On note Y une v.a. sur $\{1,\dots,k\}$ de loi $\mathbb{P}(Y=i) = p_i$ et on pose $X = (\mathbb{1}_{Y=1},\dots,\mathbb{1}_{Y=k})^T$, si bien que X suit la loi multinomiale de paramètres 1 et $p_1,\dots,p_k$.

1. Le vecteur aléatoire X a moyenne $\mathbb{E}[X] = (p_1,\dots,p_k)^T$. Calculons sa matrice de covariance : on a pour $i=1,\dots,k$,
$$\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{Y=i}) = p_i(1-p_i),$$
car $\mathbb{1}_{Y=i}$ est une v.a. de Bernoulli de paramètre p_i. De plus, on a pour $i\neq j$,
$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{Y=i},\mathbb{1}_{Y=j}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{Y=i}\mathbb{1}_{Y=j}] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{Y=i}]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{Y=j}] = 0 - p_ip_j = -p_ip_j.$$
La matrice de covariance de X est alors donnée par
$$\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i,j=1}^k,\quad \Sigma_{ij} = \begin{cases} p_i(1-p_i) & i=j\\ -p_ip_j & i\neq j\end{cases}$$
Le TCL multidimensionnel donne alors convergence en loi de $(\sum_{i=1}^n X_i - (np_1,\dots,np_k)^T)/\sqrt{n}$ vers le vecteur gaussien Z de moyenne $\mu=0$ et de matrice de covariance Σ.
2. Le vecteur $\mathbf{1} = (1,\dots,1)^T$ est de valeur propre zéro car pour tout i, on a $p_i - \sum_{j=1}^k p_ip_j = p_i - p_i = 0$, où on a utilisé le fait que $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. Ceci implique que $\mathrm{Var}(\langle \mathbf{1}, Z\rangle) = \mathrm{Var}(\mathbf{1}^T Z) = \mathbf{1}^T\Sigma\mathbf{1} = 0$, et puisque $\mathbb{E}[Z] = 0$ on a $\langle\mathbf{1},Z\rangle = 0$ p.s. Donc $Z\in\mathbf{1}^\perp$ p.s.
3. On a $\Sigma = \mathrm{diag}(p_1,\dots,p_k) - (p_ip_j)_{i,j=1}^n$, et donc avec I la matrice d'identité,
$$D\Sigma D = I - (\sqrt{p_ip_j})_{i,j=1}^n = I - \mathbf{p}\mathbf{p}^T.$$
Puisque $\mathbf{p}^T\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|_2^2 = 1$, on a alors $D\Sigma D\mathbf{p} = 0$. De plus $D\Sigma Dv = v$ pour tout $v\in\mathbf{p}^\perp$. Par conséquent, $D\Sigma D$ est la projection orthogonale sur l'espace $\mathbf{p}^T$.
4. La loi limite de $\|D(\sum_{i=1}^n X_i - (np_1,\dots,np_k)^T)/\sqrt{n}\|_2^2$ est la loi de $\|DZ\|_2^2$ par le lemme de l'application continue. Or, DZ est un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance $D\Sigma D$. On rappelle de la dernière partie que $D\Sigma D$ est la projection orthogonale sur $\mathbf{p}^\perp$. Notons $e_1,\dots,e_{k-1}$ une b.o.n. de $\mathbf{p}^\perp$. Définissons la matrice
$$O = (e_1|\cdots|e_{k-1}|\mathbf{p})^T.$$

Alors par l'Exercice 15 de cette feuille, ODZ est un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\|ODZ\|_2^2$ est la somme de $k-1$ v.a. iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et donc $\|ODZ\|_2^2 \sim \Gamma(\frac{k-1}{2}, \frac{1}{2})$. Mais puisque O est une transformation orthogonale, ceci donne

$$\|DZ\|_2^2 = \|ODZ\|_2^2 \sim \Gamma(\tfrac{k-1}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

Cette loi est également appelée la *loi du chi-deux de* $k-1$ *degrés de liberté* et notée $\chi^2(k-1)$.