Feuille de TD n^o 1

Des espaces de probabilité, des variables aléatoires et des hasards de la vie

pour jeudi 15, vendredi 16 et jeudi 22 septembre

Exercice 1. Pour chaque exemple ci-dessous, donner un espace des possibles Ω fini (en précisant son cardinal) et (si possible) une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui décrivent l'expérience ou l'objet aléatoire. Attention, parfois plusieurs réponses sont possibles qui peuvent ne pas être équivalentes.

1. Lancer d'un dé de 20 faces non pipé.
2. Le résultat de n lancers pile ou face d'une pièce non truquée.
3. Une partie aléatoire d'un ensemble S à n éléments.
4. Le résultat d'un match de foot.
5. Le résultat d'un sondage téléphonique auprès de 1047 personnes à qui ont a demandé une semaine avant le second tour de l'élection présidentielle 2012 pour qui ils allaient voter.

Exercice 2. Lesquelles des classes d'ensembles suivantes sont des tribus ? Preuve ou contre-exemple.

1. La classe des ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.
2. Dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, la classe des ensembles de forme $A \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ou $A \subset \{0,1\}^k$ pour un k fixé.
3. Dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, la classe des ensembles de forme $A \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ou $A \subset \{0,1\}^k$ pour un k qui peut dépendre de A.
4. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\{0,1\}^n \times A : A \in \mathcal{B}\}$, avec $\mathcal{B}$ une tribu quelconque sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
5. La classe des parties de $\mathbb{N}$ qui admettent une densité. On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ admet une densité si $\mathrm{Card}(A \cap \{0,\ldots,n\})/n$ admet une limite quand $n \to \infty$.

Exercice 3.

1. Soient E et F des ensembles finis. Soit μ une mesure de probabilité sur $E \times F$ telle que
$$\forall A \subset E \,\forall B \subset F : \mu(A \times B) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(E)} \times \frac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(F)}$$
Montrer que μ est la mesure uniforme sur $E \times F$.
2. Soit μ une mesure sur $[0,1]^2$ (muni de sa tribu borélienne) telle que pour tous intervalles $I, J \subset [0,1]$, $\mu(I \times J) = \mathrm{Leb}(I) \times \mathrm{Leb}(J)$. Montrer que μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^2$.

Exercice 4.

1. Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable et μ une mesure sur $(X,\mathcal{A})$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrer que l'application $\mu_A = \mu(\cdot \cap A)$ sur $\mathcal{A}$, appelée la *restriction* de la mesure μ sur A, est une mesure sur $(X,\mathcal{A})$.
2. Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $A \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0$. Montrer que l'application
$$B \in \mathcal{A} \quad \mapsto \quad \mathbb{P}(B \,|\, A) := \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$
est encore une mesure de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$, appelée la *probabilité* $\mathbb{P}$ *conditionnelle à (l'événement)* A.

Exercice 5. Vous êtes invités chez un couple d'amis qui ont deux enfants. En allant chez eux, vous vous sentez un peu mal à l'aise car vous ne vous souvenez plus des noms des enfants, même pas de leurs sexes. Heureusement, vous apercevez devant la porte d'entrée une paire de chaussures de filles, donc vous en déduisez qu'ils ont au moins une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille/un garçon ? Attention, plusieurs réponses possibles selon la formalisation de l'expérience.

Exercice 6. Soient X, Y deux v.a. iid de loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner la loi de $X + Y$. En déduire celle de $X - Y$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X + Y]$ de deux façons.

Exercice 7 (Perte de mémoire). Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Déterminer toutes les lois possibles de X telles que

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X \geq n + m \,|\, X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq m).$$

Exercice 8 (Perte de mémoire 2). Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Déterminer toutes les lois possibles de X telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{P}(X \geq x + y \,|\, X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq y).$$

Indication : attention, c'est un exercice un peu technique.

Exercice 9. Soit $X \geq 0$ une v.a. et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante et dérivable avec $f(0) = 0$. Montrer l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_0^\infty f'(x)\mathbb{P}(X \geq x)\, dx$$

Exercice 10 (Formule du crible). Le but de cet exercice et de montrer comment l'utilisation des indicatrices peut faciliter le calcul de probabilités d'événements. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que

$$\mathbf{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_i}).$$

2. Utiliser la formule précédente pour démontrer la *formule du crible* : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \sum_{I \in \mathcal{P}_{l,n}} \mathbb{P}(A_I),$$

où on note pour tout $l, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{l,n} = \{I \subset \{1, \dots, n\} : \mathrm{Card}(I) = l\}$ et pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$, $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Exercice 11. Pascal et Fermat jouent au lancer de pièce dans un café parisien. Chacun a misé 50 francs ; le premier qui arrive a 10 points gagne tout. Au score de 8 à 7 pour Fermat, celui-ci reçoit un message qui l'oblige à retourner à Toulouse sur-le-champ. Plus tard, le problème se pose comment répartir les 100 francs. Pascal propose alors que puisque Fermat a gagné 8 lancers sur 15, il devrait recevoir 8/15 du montant et Pascal les 7/15 restants. Fermat n'est pas d'accord : il propose que chacun reçoit le montant proportionnel à sa probabilité de gagner le jeu. Comparez les deux propositions. Laquelle trouvez-vous plus juste ?

Exercice 12. Soient X et Y deux v.a. iid de loi uniforme sur $[0, 1]$. Donner la loi de $X + Y$ et $X - Y$.

Exercice 13 (Loi gamma). La *loi gamma*, notée $\Gamma(\alpha, \beta)$ avec [1] $\alpha, \beta > 0$ est la loi sur $[0, \infty)$ de densité

$$f_{\alpha,\beta}(x) = c_{\alpha,\beta} x^{\alpha-1} e^{-\beta x},$$

pour une constante de normalisation $c_{\alpha,\beta}$. Cette loi joue un rôle très important en probabilité.

1. Calculer la valeur de la constante $c_{\alpha,\beta}$ en fonction de la fonction Γ d'Euler, définie pour $\Re\alpha > 0$ par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

2. Identifier la loi exponentielle de paramètre λ comme une loi Gamma avec des paramètres qu'on précisera.
3. Si $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, montrer que N^2 suit une loi Gamma avec des paramètres qu'on précisera.
4. Soit $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Quelle est la loi de bG pour $b > 0$?
5. Soient G_1, G_2 des v.a. indépendantes avec $G_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, 2$. Quelle est la loi de $G_1 + G_2$?

1. Attention ! D'autres conventions pour le choix des paramètres existent, surtout pour le deuxième.

6. Soient $G_1, \dots, G_n$ des v.a. indépendantes avec $G_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, \dots, n$. Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n G_i$?
7. Soit $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Calculer les moments entiers $\mathbb{E}[G^n]$, $n \in \mathbb{N}$. En déduire les moments entiers $\mathbb{E}[N^n]$ d'une variable gaussienne standard N.
8. *optionnel :* Soit $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Montrer que la fonction caractéristique de G vaut
$$\varphi_G(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\lambda G}] = \left(\frac{\beta}{\beta - i\lambda}\right)^\alpha.$$
Indication : montrer que φ_G satisfait à une équation différentielle.
En déduire les résultats obtenus dans les parties 4, 6 et 7 de cet exercice.

Exercice 14 (Méthode de premier et second moment). Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Nous nous intéressons à la probabilité de l'événement $\{X \neq 0\}$. Nous allons voir qu'on peut obtenir des bornes sur cette probabilité à partir des deux premiers moments de la v.a. X.

1. A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que $\mathbb{P}(X \neq 0) \le \mathbb{E}X$.
2. A l'aide de l'inégalité de Chebychev, montrer que $\mathbb{P}(X \neq 0) \ge 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{(\mathbb{E}X)^2}$.
3. A l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que $\mathbb{P}(X \neq 0) \ge \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}[X^2]}$.
4. Montrer que la borne inférieure obtenue dans 3. est toujours aussi bonne ou meilleure que celle obtenue dans 2.

Nous résumons les résultats ci-dessus : Pour une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$,
$$1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{(\mathbb{E}X)^2} \le \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}[X^2]} \le \mathbb{P}(X \neq 0) \le \mathbb{E}X.$$

Exercice 15 (Méthode de premier et second moment : application). Soient $X_1, \dots, X_n$ les résultats de n lancers pile ou face, avec pile $= 1$ et face $= 0$. Autrement dit, soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. iid de loi $\mathrm{Ber}(1/2)$, ou encore, soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire uniforme dans $\{0,1\}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, soit $A_{k,n}$ l'événement que la suite $X_1, \dots, X_n$ contient k uns consécutifs. Dans cet exercice, on souhaite estimer la probabilité $\mathbb{P}(A_{k,n})$ en fonction de k et n. Pour simplifier la notation qui suit, on pose $X_0 = 0$. On définit alors la v.a.
$$\begin{aligned} I_{k,n} &= \#\{i \in \{0, \dots, n-k\} : X_i = 0,\ X_{i+1} = \dots = X_{i+k} = 1\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \mathbf{1}_{B_i}, \end{aligned}$$
où on définit pour tout $i = 0, \dots, n-k$ l'événement
$$B_i = \{X_i = 0,\ X_{i+1} = \dots = X_{i+k} = 1\}.$$

1. Justifier l'égalité des événements
$$A_{k,n} = \{I_{k,n} \ge 1\}.$$
2. Calculer $\mathbb{E}[I_{k,n}]$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[I_{k,n}^2] \le \mathbb{E}[I_{k,n}] + \mathbb{E}[I_{k,n}]^2$.
4. A l'aide de l'Exercice 14, déduire des résultats précédents les bornes suivantes :
$$\frac{(n-k+2)2^{-k-1}}{1 + (n-k+2)2^{-k-1}} \le \mathbb{P}(A_{k,n}) \le (n-k+2)2^{-k-1}.$$
5. Application numérique : Dresser une table des bornes inférieures et supérieures des valeurs de $\mathbb{P}(A_{k,n})$ pour $n = 100$ et $k = 1, 2, \dots, 10$.

Exercice 16 (Borne de Chernoff).

1. Soit X une v.a. réelle. On définit les fonctions $\varphi(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\lambda X}] \in (0, \infty]$ et $I(x) = \sup_{\lambda \ge 0}[\lambda x - \varphi(\lambda)]$. Montrer la *borne de Chernoff* :
$$\forall x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \ge x) \le e^{-I(x)}.$$
2. Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de v.a. iid. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \ge an) \le e^{-nI(a)}.$$