Feuille de TD n° 8

Chaînes de Markov. Étude qualitative et quelques exemples.

pour la semaine du 28 novembre au 2 décembre

Exercice 1. Le chauffage d'une maison individuelle est composé d'un chauffage de base et d'un chauffage d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état 2 si les deux chauffages fonctionnent. Si un jour on est dans l'état 1, on estime que le lendemain on est encore dans l'état 1 avec une probabilté 1/2. Si on est dans l'état 2, le lendemain la maison sera chaude et on pourra passer à l'état 1 avec probabilité 3/4. Soit X_n l'état du système au jour n.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer la matrice de transition Q.
2. Soit $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1), n \geq 0$. Déterminer une relation de recurrence entre p_n et p_{n+1}.
3. Sachant qu'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.
4. Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec probabilité 3/5, alors tous les jours, on a encore une probabilité 3/5 d'être dans l'état 1.
5. Chaque journée dans l'état 1 coûte 2 euros, dans l'état 2 coûte 4 euros et chaque transition de 1 à 2 ou de 2 à 1 coûte 1 euro. Calculer le coût moyen dans la situation précédente.

Exercice 2. On considère la matrice de Markov suivante (l'espace d'états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et les $*$ sont des coefficients non nuls) :

$$Q = (Q(i,j))_{(i,j)\in E^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Trouver les états absorbants, transitoires et les classes de récurrence. On pourra se servir d'une représentation graphique.

Exercice 3. Soit ξ_n le résultat du n-ième jet d'un dé, autrement dit, soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une famille de v.a. iid de loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$. On pose pour tout $n \geq 1$, $X_n = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, avec $X_0 = 1$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\{1, \ldots, 6\}$. Donner la matrice de transition Q, ainsi que Q^n pour tout $n \geq 1$. Classifier les états.

Exercice 4. Soit E dénombrable. On dit qu'un processus stochastique $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov *inhomogène*, s'il existe des matrices $(Q_n)_{n\geq 0}$, telles que $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0, \ldots, X_n) = Q_n(X_n, y)$ pour tout n. Montrer que le *processus espace-temps* $((X_n, n))_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov (classique) sur $E \times \mathbb{N}$ et donner sa matrice de transition.

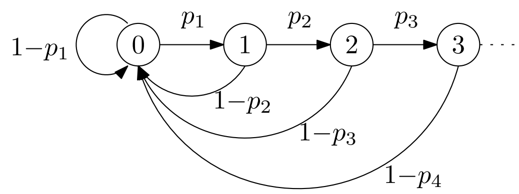

FIGURE 1 – Les transitions de la chaîne de Markov de l'Exercice 5.

Exercice 5. On étudie la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de transitions données dans la Figure **??**. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ pour que 0 soit un état récurrent.

Exercice 6. On étudie une file d'attente à un guichet. On note ξ_{n+1} le nombre de clients arrivant entre les temps n et $n+1$. Un client arrivant dans cette période sera servi (et donc enlevé de la file) à l'instant $n+1$, même si personne ne se trouvait au guichet quand il est arrivé. On note X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant n.

1. Montrer que $X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1} - 1)^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n}(\xi_k - 1)$ et $M_n = \min\{0, S_0, S_1, \ldots, S_n\}$, si bien que $M_0 = 0$ et $M_{n+1} = \min(M_n, S_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $S_n - M_n = X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. À partir de maintenant, on suppose que les variables ξ_n, pour $n \geq 1$, sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mu = (\mu(k))_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\mu(0) > 0$ et $\mu(k) > 0$ pour un $k \geq 2$. De plus, on suppose X_0 indépendante de la suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition. Montrer que la chaîne est irréductible.
4. Montrer, en utilisant la loi forte des grands nombres, que si $\mathbb{E}(\xi_1) > 1$, alors $\lim_{n \to \infty} X_n = +\infty$.
5. On note $T = \inf\{n \geq 0 \mid S_n = 0\}$. Montrer que $X_n = S_n$ pour tout $n \leq T$, p.s. En déduire que si $\mathbb{E}(\xi_1) \leq 1$, l'état 0 est récurrent. En déduire que tous les états sont récurrents.

Exercice 7. On considère la marche aléatoire simple sur l'arbre binaire en tant que chaîne de Markov. Montrer que la chaîne est irréductible. La marche est-elle récurrente ou transitoire ?

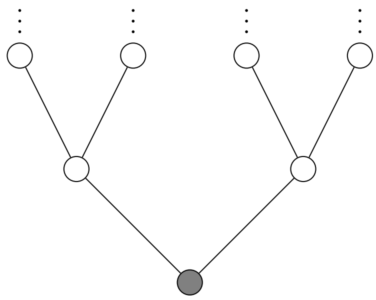

FIGURE 2 – Un arbre binaire (avec une racine marquée).