Feuille de TD nº 7. Corrigé

Exercice 1. Il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}(C^c \cap \{\liminf X_n > -\infty\}) = 0,$$

car en appliquant ce résultat à la martingale $(-X_n)_{n\geq 0}$ on obtient $\mathbb{P}(C^c \cap \{\limsup X_n < +\infty\}) = 0$ et donc

$$0 = \mathbb{P}(C^c \cap \{\limsup X_n < +\infty \text{ ou } \liminf X_n > -\infty\}) = \mathbb{P}((C \cup D)^c).$$

Quitte à considerer la martingale $X_n - X_0$, on peut supposer que $X_0 = 0$. Soit $K \in \mathbb{N}$ et posons $T_K = \inf\{n : X_n \leq -K\}$. Alors $(X_{n\wedge T_K})_{n\geq 0}$ est une martingale avec $X_{n\wedge T_K} \geq -K - M$ presque sûrement. On sait d'après le cours qu'une martingale positive converge presque sûrement vers une limite finie ; en appliquant ce théorème à la martingale $(X_{n\wedge T_K} + K + M)_{n\geq 0}$ on obtient alors que $X_{n\wedge T_K}$ converge p.s. quand $n \to \infty$. Ceci implique que X_n converge p.s. sur l'événement $\{T_K = \infty\}$, ou

$$\mathbb{P}(C^c \cap \{T_K = \infty\}) = 0.$$

Par l'égalité des événements $\{\liminf X_n > -\infty\} = \lim_{K\to\infty} \uparrow \{T_K = \infty\}$, cela donne

$$\mathbb{P}(C^c \cap \{\liminf X_n > -\infty\}) = 0.$$

Exercice 2 (Lemme de Borel–Cantelli). Comme $\omega \in \limsup A_n$ ssi $\sum_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \infty$ il suffit de montrer que $\sum_n \mathbf{1}_{A_n} = \infty$ ssi $\sum_n \mathbb{P}(A_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \infty$ sur un ensemble de probabilité 1. Soit $X_n = \sum_{m=1}^n \mathbb{1}_{A_m} - \mathbb{P}(A_m|\mathcal{F}_{m-1})$ pour tout $n \geq 1$. Alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale avec $|X_n - X_{n-1}| \leq 1$. Noter que X_n est la différence des sommes partielles pour chacune des séries ci-dessus. Soient C et D les événements de l'exercice précédant. Alors,

- sur C, $\lim_n X_n = X_\infty$ existe et donc $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{A_n} = X_\infty + \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1})$. En particulier, $\sum_n \mathbf{1}_{A_n} = \infty$ ssi $\sum_n \mathbb{P}(A_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \infty$.
- sur D, en fait les deux séries divergent (et donc l'équivalence est vraie), car $\limsup_n X_n = \infty$ implique $\sum_n \mathbf{1}_{A_n} = \infty$ et $\liminf_n X_n = -\infty$ implique $\sum_n \mathbb{P}(A_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \infty$ par positivité de chacune des deux séries.

En résumant, sur $C \cup D$, $\sum_n \mathbf{1}_{A_n} = \infty$ ssi $\sum_n \mathbb{P}(A_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \infty$. D'après le dernier exercice, $C \cup D$ est un ensemble de probabilité 1. CQFD.

Exercice 3 (Quelques (contre-)exemples).

1. Par indépendance de ε_{n+1}, Y_{n+1} et $\mathcal{F}_n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1} Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}]\mathbb{E}[Y_{n+1}] = 0,$$

car $\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{2}(a_n - a_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ceci montre que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Montrons qu'elle converge presque sûrement. On a

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty,$$

et donc par Borel–Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup_n \{\varepsilon_n = 1\}) = 0.$$

Mais puisque ε_n prend valeurs dans $\{0, 1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela implique

$$\mathbb{P}(\exists N\, \forall n \geq N : \varepsilon_n = 0) = \mathbb{P}(\liminf_n \{\varepsilon_n = 0\}) = 1 - \mathbb{P}(\limsup_n \{\varepsilon_n = 1\}) = 1.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(\exists N\, \forall n \geq N : M_n = M_N) = 1,$$

et donc M_n converge p.s. quand $n \to \infty$.

On souhaite trouver une condition suffisante sur $(a_n)_{n\geq 0}$ tel que $(M_n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée. On raisonne par contradiction. Supposons que $(M_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans L^1. Alors $\varepsilon_n Y_n = M_n - M_{n-1}$ l'est également car $\|\varepsilon_n Y_n\|_1 \leq \|M_n\|_1 + \|M_{n-1}\|_1$ par l'inégalité triangulaire. Or,

$$\mathbb{E}[|\varepsilon_n Y_n|] = a_n \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \frac{a_n}{n^2}.$$

Cela montre que $\|M_n\|_1 \to \infty$, dès lors que $a_n/n^2 \to \infty$ quand $n \to \infty$.

2. On a $\mathcal{F}_n = \sigma(M_2, \ldots, M_n) = \sigma(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ pour tout $n \geq 2$, car $(M_2, \ldots, M_n)$ est une fonction de $(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ et vice versa. Il vient,

$$\mathbb{E}[M_n - M_{n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\xi_n] = \frac{-n^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2-1}\frac{n^2-1}{n^2} = -1 + 1 = 0.$$

On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_n = -n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

et donc par Borel–Cantelli,

$$\mathbb{P}(\exists N \, \forall n \geq N : \xi_n = \frac{n^2}{n^2-1}) = 1 - \mathbb{P}(\limsup_n \{\xi_n = -n^2\}) = 1.$$

Puisque $n^2/(n^2-1) \geq 1/2$ pour $n \geq 2$, cela montre que $M_n \to \infty$ p.s.

Exercice 4 (Sommes aléatoires). On définit $S_n = \sum_{k=1}^n a_k X_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ sa filtration canonique. On a alors,

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[a_{n+1}X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + a_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n.$$

Donc, $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, par indépendance,

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(a_k X_k) = \mathrm{Var}(X_1) \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

En particulier, puisque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, la martingale $(S_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans L^2. Par conséquent, elle converge p.s.

Exercice 5 (Théorème de Rademacher).

1. Soit $x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k}$ comme dans l'énoncé et $n \in \mathbb{N}$. On note $r = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k 2^{-k} < 2^{-n}$. On a alors

$$\varphi_n(x) = \lfloor 2^n x \rfloor 2^{-n} = \left\lfloor \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{n-k} + r2^n \right\rfloor 2^{-n} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k 2^{n-k} \right) 2^{-n} = \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{-k}.$$

Par conséquent, si $0 \leq k \leq n$, alors

$$\varphi_k(\varphi_n(x)) = \varphi_k\left(\sum_{i=1}^{n} b_i 2^{-i} \right) = \sum_{i=1}^{k} b_i 2^{-i} = \varphi_k(x).$$

2. On a d'après 1., $X_k = \varphi_k(X_n)$ pour tout $k \in n$, où les φ_k sont continues par morceaux et donc mesurables. Par conséquent, $\sigma(X_k) \subset \sigma(X_n)$ et donc $\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n)$. En ce qui concerne la second égalité, puisque $X_n = \varphi_n(X)$, on a trivialement $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) \subset \sigma(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, par 1., on a $X = \lim_{n\in\infty} \varphi_n(X) = \lim_{n\in\infty} X_n$, et donc

$$\sigma(X) \subset \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci implique la seconde égalité.

3. Soient $B_1, B_2, \ldots$ des v.a. iid de loi $\mathrm{Ber}(p)$. On sait d'après le cours qu'en posant $X = \sum_{k=1}^{\infty} B_k 2^{-k}$, X est de loi uniforme sur $(0,1)$. De plus, on a $X_n = \sum_{k=1}^{n} B_k 2^{-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors,

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n] = \mathbb{E}[h(X_n + B_{n+1}2^{-(n+1)})|X_n] = \frac{1}{2}(h(X_n + 2^{-(n+1)}) + h(X_n)).$$

Par conséquent, avec $h(x) = 2^{n+1}(f(x + 2^{-(n+1)}) - f(x))$, on a

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{2}2^{n+1}(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)) = Z_n.$$

Notons que $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est une filtration à cause de la partie 2. On en déduit que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale. De plus, puisque f est Lipschitz sur $[0,1]$ et $X_n \leq 1 - 2^{-n}$ p.s., on a

$$|Z_n| = 2^n |f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)| \leq 2^n L 2^{-n} = L,$$

et donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

4. Puisque $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée, elle converge p.s. et dans L^1 vers une v.a. Z. Cette v.a. est mesurable par rapport à $\bigcap_{n\geq 0}\sigma(X_n, X_{n+1},\ldots) = \sigma(X)$, où la dernière égalité vient de la partie 2. Par le lemme crucial, on a alors $Z = g(X)$ pour une fonction mesurable g, et puisque $(Z_n)_{n\geq 0}$ est bornée, g l'est aussi.
5. Par la décomposition dyadique de X (voir la solution de la partie 3), on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, que $X - X_n$ est de loi uniforme sur $[0, 2^{-n})$ et indépendante de $\mathcal{F}_n$. Par conséquent,
$$\mathbb{E}[h(X)|X_n] = 2^n\int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} h(u)\mathrm{d}u.$$
De plus, on sait que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale fermée et donc $Z_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[g(X)|X_n]$. Ceci donne la formule pour Z_n.
6. D'après la dernière partie, on a $f(X_n+2^{-n}) - f(X_n) = \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u$ p.s., pour tout $n\in\mathbb{N}$. Puisque $\mathbb{P}(X_n = a2^{-n}) > 0$ pour tout $a\in\{0,\ldots,2^n-1\}$, il en suit que
$$f((a+1)2^{-n}) - f(a2^{-n}) = \int_{a2^{-n}}^{(a+1)2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u,$$
pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $a\in\{0,\ldots,2^n-1\}$, et par conséquent, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$ pour tout x de la forme $a2^{-n}$, $a\in\{1,\ldots,2^n\}$. Par continuité de f, on en déduit que cette formule est vrai pour tout $x\in[0,1]$.

Exercice 6 (Martingales exponentielles de la marche aléatoire).

1. Soit $\theta\neq 0$. Par la loi des grands nombres, $S_n/n\to 0$ p.s. quand $n\to\infty$, si bien que presque sûrement,
$$\frac{1}{n}\log W_n(\theta) = \theta\frac{S_n}{n} - \log\cosh\theta \to -\log\cosh\theta < 0.$$
En particulier, $\log W_n(\theta)\to -\infty$ p.s. et donc $W_n(\theta)\to 0$ p.s. quand $n\to\infty$.
Si $W_n(\theta)$ était uniformément intégrable, alors elle convergerait dans L^1 vers sa limite. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}[W_n(\theta)] = \mathbb{E}[W_0(\theta)] = 1\neq 0$. Par conséquent, la martingale $W_n(\theta)$ n'est pas u.i.
2. On sait d'après le cours que T_1 est un temps d'arrêt et que $T_1 < \infty$ p.s. La martingale arrêtée $W_n^{T_1}(\theta) = W_{n\wedge T_1}(\theta)$ converge alors p.s. vers $W_{T_1}(\theta)$. De plus, puisque $S_{n\wedge T_1}\leq 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\cosh(\theta)\geq 1$, on a $W_{n\wedge T_1}(\theta)\leq e^\theta$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\geq 0$. Et bien sûr, $W_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par conséquent, la martingale arrêtée $W^{T_1}(\theta)$ est bornée et converge donc dans L^1 vers sa limite $W_{T_1}(\theta)$, d'où
$$\mathbb{E}[W_{T_1}(\theta)] = \mathbb{E}[W_0] = 1.$$
Or, $\mathbb{E}[W_{T_1}(\theta)] = \mathbb{E}[e^\theta\cosh(\theta)^{-T_1}]$, ce qui donne $\mathbb{E}[\cosh(\theta)^{-T_1}] = e^{-\theta}$.
3. On a pour tout $\theta\geq 0$,
$$\mathbb{E}[W_{T_{-1}}(\theta)] = \mathbb{E}[e^{-\theta}\cosh(\theta)^{T_{-1}}] = e^{-\theta}\mathbb{E}[\cosh(\theta)^{T_{-1}}] = e^{-2\theta},$$
d'après la dernière partie et le fait que T_{-1} et T_1 ont même loi.
4. Pour $\lambda > 0$, soit $\theta > 0$ tel que $e^\lambda = \cosh(\theta)$. En particulier, $\lambda\downarrow 0$ si et seulement si $\theta\downarrow 0$. Plus précisément, quand $\lambda\downarrow 0$,
$$e^\lambda = \cosh(\theta) = 1 + \frac{\cosh''(0)}{2}\theta^2 + o(\theta^2) = 1 + \tfrac{1}{2}\theta^2 + o(\theta^2) = e^{\frac{1}{2}\theta^2+o(\theta^2)},$$
et donc $\theta\sim\sqrt{2\lambda}$ quand $\lambda\downarrow 0$. Avec la partie 2 de l'exercice, on a
$$1 - \mathbb{E}[e^{-\lambda T_1}] = 1 - e^{-\theta}\sim\theta\sim\sqrt{2\lambda},\quad \text{quand } \lambda\downarrow 0.$$
5. Quand $\theta\in\mathbb{C}$, on peut montrer comme dans la partie 1 que $W_n(\theta)$ est une martingale à valeurs complexes (on admet que tous les résultats se transportent dans le complexe). En particulier, $\Re W_n(\theta)$ est encore

une martingale. Or, on a $Z_n(\gamma) = \Re W_n(i\gamma)$ pour $\gamma \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, puisque $e^{i\gamma} = \cos(\gamma) + i\sin(\gamma)$ et $\cosh(i\gamma) = \cos(\gamma)$. Ceci permet de conclure.

Bien sûr, on peut se priver de cette explication élégante et rester dans le réel : on a pour $n \in \mathbb{N}$, par le théorème d'addition du cosinus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}(\gamma)|\mathcal{F}_n] &= \cos(\gamma)^{-n-1}\mathbb{E}[\cos(\gamma S_n + \gamma X_{n+1})|\mathcal{F}_n]\\ &= \cos(\gamma)^{-n-1}\mathbb{E}[\cos(\gamma S_n)\cos(\gamma X_{n+1}) - \sin(\gamma S_n)\sin(\gamma X_{n+1})|\mathcal{F}_n]\\ &= \frac{Z_n(\gamma)}{\cos(\gamma)}\mathbb{E}[\cos(\gamma X_{n+1})] + \frac{\sin(\gamma S_n)}{\cos(\gamma)^{n+1}}\mathbb{E}[\sin(\gamma X_{n+1})]\\ &= \frac{Z_n(\gamma)}{\cos(\gamma)}\frac{\cos(\gamma)+\cos(-\gamma)}{2} + \frac{\sin(\gamma S_n)}{\cos(\gamma)^{n+1}}\frac{\sin(\gamma)+\sin(-\gamma)}{2}\\ &= Z_n(\gamma).\end{aligned}$$

6. On note d'abord que $T_{-a,a} \le T_a < \infty$ p.s. par un théorème du cours. Puisque $Z_n(\frac{\pi}{2a}) = \cos(\frac{\pi}{2a}S_n)/\cos(\frac{\pi}{2a})^n$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, on a $Z_{T_{-a,a}}(\frac{\pi}{2a}) = 0$. Par conséquent

$$\mathbb{E}[Z_{T_{-a,a}}(\tfrac{\pi}{2a})] = 0 \neq 1 = \mathbb{E}[Z_0(\tfrac{\pi}{2a})].$$

Le théorème d'arrêt optionnel nous dit alors que les martingales $(Z_{n\wedge T_{-a,a}}(\frac{\pi}{2a}))_{n\ge 0}$ et $(Z_n(\frac{\pi}{2a}))_{n\ge 0}$ ne sont pas uniformément intégrables.

7. On a $0 \le \cos(\frac{\pi}{2a}x) \le 1$ pour tout $x \in [-a,a]$. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \le Z_{n\wedge T_{-a,a}}(\tfrac{\pi}{2a}) \le \cos\left(\tfrac{\pi}{2a}\right)^{-(n\wedge T_{-a,a})} \le \cos\left(\tfrac{\pi}{2a}\right)^{-T_{-a,a}}.$$

Si on avait $\mathbb{E}[\cos\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{-T_{-a,a}}] < \infty$, la martingale $(Z_{n\wedge T_{-a,a}}(\frac{\pi}{2a}))_{n\ge 0}$ serait alors uniformément intégrable, ce qui est exclu d'après la dernière partie. Par conséquent, $\mathbb{E}[\cos\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{-T_{-a,a}}] = \infty$.

8. Soit $\gamma \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $n \le T_{-a,a}$, on a $S_n \in [-a,a]$ et donc $Z_{n\wedge T_{-a,a}}(\gamma) \ge 0$ pour tout n. Par le lemme de Fatou, on a alors

$$\mathbb{E}[Z_{T_{-a,a}}(\gamma)] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} Z_{n\wedge T_{-a,a}}(\gamma)] \le \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[Z_{n\wedge T_{-a,a}}(\gamma)] = \mathbb{E}[Z_0(\gamma)] = 1.$$

Par conséquent, $1 \ge \cos(\gamma a)\mathbb{E}[\cos(\gamma)^{-T_{-a,a}}]$, et donc

$$\mathbb{E}[\cos(\gamma)^{-T_{-a,a}}] \le (\cos(\gamma a))^{-1} < \infty.$$

9. Soit λ_a la solution de $e^{\lambda_a} = \cos(\frac{\pi}{2a})^{-1}$. D'après la partie 7, on a alors $\mathbb{E}[e^{\lambda_a T_{-a,a}}] = \infty$, et donc, puisque $T_{-a,a} \ge 0$, $\mathbb{E}[e^{\lambda T_{-a,a}}] = \infty$ pour tout $\lambda \ge \lambda_a$. Par la partie 8, à cause de la continuité du cosinus, on a en plus $\mathbb{E}[e^{-\lambda T_{-a,a}}] < \infty$ pour tout $\lambda \in [0, \lambda_a[$, et on l'a trivialement pour $\lambda < 0$ puisque $T_{-a,a} \ge 0$. Ceci permet de conclure.

En ce qui concerne l'équivalent de λ_a quand $a \to \infty$, on remarque d'abord que pour $x \to 0$, on a

$$\cos(x)^{-1} = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^{-1} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = e^{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}.$$

Par conséquent, on a $\lambda_a \sim \frac{\pi^2}{8a^2}$ quand $a \to \infty$.

Exercice 7 (Modèle de Wright-Fisher).

1. Pour tout n, X_n est intégrable, car $0 \le X_n \le N$. Conditionellement à $\mathcal{F}_n$, X_{n+1} suit la loi binomiale de paramètres N et $p = X_n/N$. Par conséquent,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n] = N \times \frac{X_n}{N} = X_n.$$

$(X_n)_{n\ge 0}$ est donc une martingale. Puisqu'elle est bornée (par N), elle converge alors dans L^1 et p.s. vers une limite X_∞.

2. M_n est bornée par $(N/(N-1))^n N^2$ et donc intégrable. On calcule l'espérance conditionelle :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n] &= (\tfrac{N}{N-1})^{n+1} \sum_{i=0}^{N} i(N-i)\tbinom{N}{i}(\tfrac{X_n}{N})^i(1-\tfrac{X_n}{N})^{N-i} \\
&= (\tfrac{N}{N-1})^{n+1} \sum_{i=1}^{N-1} \tfrac{N!}{(N-i-1)!(i-1)!}(\tfrac{X_n}{N})^i(1-\tfrac{X_n}{N})^{N-i} \\
&= (\tfrac{N}{N-1})^{n+1} N(N-1)\tfrac{X_n}{N}(1-\tfrac{X_n}{N}) \sum_{i=1}^{N-1} \tbinom{N-2}{i-1}(\tfrac{X_n}{N})^{i-1}(1-\tfrac{X_n}{N})^{N-i-1} \\
&= (\tfrac{N}{N-1})^{n} X_n(N-X_n) \sum_{i=0}^{N-2} \tbinom{N-2}{i}(\tfrac{X_n}{N})^{i}(1-\tfrac{X_n}{N})^{N-2-i} \\
&= M_n.
\end{aligned}$$

Ici, la dernière somme vaut 1, car c'est la somme sur les probabilités qu'une v.a. binomiale de paramètres $N-2$ et $p = X_n/N$ vaut i.

3. Puisque X_n converge dans L^1 vers X_∞, on a

$$\mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0] = k.$$

Aussi, puisque $X_n \to X_\infty$ p.s., $X_n(N-X_n) \to X_\infty(N-X_\infty)$ p.s. De plus, $0 \le X_n(N-X_n) \le N$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par convergence dominée et le fait que M_n est une martingale,

$$\mathbb{E}[X_\infty(N-X_\infty)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n(N-X_n)] = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{N-1}{N})^n \mathbb{E}[M_n] = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{N-1}{N})^n k(N-k) = 0.$$

4. Puisque $X_\infty \in \{0,\dots,N\}$, $X_\infty(N-X_\infty) \ge 0$. Or, $\mathbb{E}[X_\infty(N-X_\infty)] = 0$ par la dernière partie, si bien que $X_\infty(N-X_\infty) = 0$ p.s., ou $X_\infty \in \{0,N\}$ p.s. Puisque $\mathbb{E}[X_\infty] = k$, cela détermine la loi de X_∞ comme étant

$$\mathbb{P}(X_\infty = 0) = \frac{N-k}{N}, \quad \mathbb{P}(X_\infty = N) = \frac{k}{N}.$$

On interprète ce résultat comme suit : Presque sûrement, un des deux types a ou A envahit toute la population. La probabilité que le type a envahit la population est k/N, soit proportionelle au nombre d'individus de type a au début.

Exercice 8 (Un jeu de cartes).

1. Après avoir retourné n cartes, il restent $52-n$ cartes dans le jeu. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_{n+1}\,|\,R_n = j) = \frac{j}{52-n}.$$

2. On a soit $R_{n+1} = R_n$, soit $R_{n+1} = R_n - 1$. Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_{n+1} = R_n\,|\,R_n) &= \mathbb{P}(A_{n+1}^c\,|\,R_n) = 1 - \frac{R_n}{52-n} \\
\mathbb{P}(R_{n+1} = R_n - 1\,|\,R_n) &= \mathbb{P}(A_{n+1}\,|\,R_n) = \frac{R_n}{52-n}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}[R_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n] = R_n - \mathbb{P}(R_{n+1} = R_n - 1\,|\,R_n) = R_n - \frac{R_n}{52-n} = R_n\frac{51-n}{52-n}.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n] = \frac{\mathbb{E}[R_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n]}{52-(n+1)} = R_n\frac{51-n}{(52-n)(51-n)} = X_n.$$

X_n est donc une martingale, et d'après la première partie de l'exercice, $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1}\,|\,R_n) = \mathbb{P}(A_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)$.

3. Il est naturel de supposer que τ est un temps d'arrêt, ce qui correspond à ce que le joueur ne connaisse que les cartes qui ont été retournées et doit donc baser sa stratégie sur cette information.

   Le joueur gagne si la $(\tau+1)$-ième carte retournée est rouge, soit, si A_{n+1} est vérifié quand $\tau = n$. Par conséquent, la probabilité de victoire est

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{51} \mathbb{P}(A_{n+1},\, \tau = n) &= \sum_{n=0}^{51} \mathbb{E}[\mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n)\mathbf{1}_{\tau=n}] \\ &= \sum_{n=0}^{51} \mathbb{E}[X_\tau \mathbf{1}_{\tau=n}] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau].\end{aligned}$$

   Puisque τ est un temps d'arrêt borné, le théorème d'arrêt optionnel donne

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[R_0/52] = 1/2.$$

   La probabilité de victoire est alors égale à $1/2$ pour n'importe quel temps d'arrêt τ, autrement dit, toutes les stratégies se valent.