Feuille de TD n° 4

Convergence(s) de variables aléatoires

pour les semaines du 10 au 14 et du 17 au 21 octobre

Intégrabilité uniforme, convergence L^p

Exercice 1. Soient $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ deux familles de v.a. dans $\mathbb{R}^d$ uniformément intégrables. Montrer que la somme $(X_i+Y_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

Exercice 2. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable telle que $\|f(x)\| \le C(\|x\|+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour une certaine constante $C < \infty$. Montrer que si la famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable, alors la famille $(f(X_i))_{i\in I}$ l'est encore.

Exercice 3. Soit $p \ge 1$ et soient $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

1. $X, X_1, X_2, \ldots \in L^p$ et $X_n \to X$ dans L^p
2. $X_n \to X$ en probabilité et la suite $(\|X_n\|^p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément intégrable.

Conseil : Pensez à l'inégalité de Minkowski : $\|Y+Z\|_p \le \|Y\|_p + \|Z\|_p$.

Exercice 4 (Lemme de Scheffé). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles positives. On suppose que $\mathbb{E}[X_n] < \infty$ pour tout n. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X_∞ et si $(\mathbb{E}[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}[X_\infty] < \infty$, montrer alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X_∞ dans L^1. *Conseil : Utiliser (après vérification) la formule* $|a-b| = a+b-2\min(a,b)$ *pour* $a, b \in \mathbb{R}$.

Convergence en loi

Exercice 5. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $np_n \to \lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer par calcul direct *et* par les fonctions génératrices que la loi binomiale de paramètres n et p_n converge vers la loi de Poisson de paramètre λ quand $n \to \infty$.

Exercice 6. Pour tout $p \in (0,1]$, soit X_p une variable aléatoire géométrique de paramètre p. Quand $p \to 0$, montrer par calcul direct *et* par les fonctions caractéristiques que pX_p tend en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 7. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. iid de loi Exp(1). Montrer que $\max(X_1,\ldots,X_n) - \log n$ converge en loi quand $n \to \infty$ et préciser la limite.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X_n)$ converge en loi vers $f(X)$.

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que f est continue μ_X-presque partout. Montrer que $f(X_n)$ converge en loi vers $f(X)$. *Conseil : Utiliser le théorème de représentation de Skorokhod.*

Exercice 10. Soient $(X_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (X_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de v.a. réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(k)}$ sont indépendantes. On suppose pour tout $i = 1, \ldots, k$ que $X_n^{(i)} \to X^{(i)}$ en loi quand $n \to \infty$, où $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$ sont des v.a. réelles qu'on suppose indépendantes. Montrer que $(X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(k)}) \to (X^{(1)}, \ldots, X^{(k)})$ en loi quand $n \to \infty$.

Exercice 11 (Lois stables). Soient $X_1, X_2, \ldots$ des copies iid d'une v.a. réelle X dont la loi est de densité

$$f(x) = \frac{c_\alpha}{1+|x|^{\alpha+1}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pour un certain $\alpha \in \,]1,2[$. Ici, c_α est un constante de normalisation. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Le but de cet exercice est de montrer que $S_n/n^{1/\alpha}$ converge en loi quand $n \to \infty$ et d'identifier la loi limite.

1. On note φ_X la fonction caractéristique de X. Montrer que

$$\varphi_X(\lambda) - 1 = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x) f(x)\, dx.$$

Note : montrer en particulier que $x \mapsto (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x)f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, telle que
$$\varphi_X(\lambda) - 1 \sim -C|\lambda|^\alpha, \quad \lambda \to 0.$$
3. Montrer que
$$\mathbb{E}[e^{i\lambda S_n/n^{1/\alpha}}] \to e^{-C|\lambda|^\alpha}, \quad n \to \infty$$
4. En déduire que $\lambda \mapsto e^{-C|\lambda|^\alpha}$ est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$.
5. Soit Y une v.a. de fonction caractéristique $\lambda \mapsto e^{-C|\lambda|^\alpha}$. Soit Y' une copie indépendante de Y. Montrer que pour tout $a, b > 0$,
$$aY + bY' \overset{\text{loi}}{=} (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} Y$$
La loi d'une variable ayant cette propriété est dite une *loi α-stable*. Quelles lois 2-stables connaissez-vous ?

Théorème central limite

Exercice 12. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. réelles iid de moyenne nulle et variance 1. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $A_n = S_n/\sqrt{n}$. Montrer que $A_{2n} - A_n$ ne tend pas vers 0 en probabilité. En déduire que $S_n/\sqrt{n}$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 13. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. réelles iid de moyenne μ et variance finie. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que la suite des variables aléatoires $\left(\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}}\right)^2$ est uniformément intégrable. *Conseil : Utiliser le TCL, puis le théorème de représentation de Skorokhod, puis appliquer le lemme de Scheffé.*

Exercice 14 (Problème des allumettes de Banach). Un fumeur a dans chacune de ses poches une boîte contenant n allumettes. À chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il la prend dans l'une ou l'autre boîte avec probabilité 1/2. Soit X_n le nombre d'allumettes restant dans une boîte quand le fumeur s'aperçoit *pour la première fois* que l'autre boîte est vide.

1. Formaliser l'expérience. Exhiber deux suites de v.a. iid de loi géométrique et exprimer X_n en fonction de celles-ci.
2. Etudier la convergence en loi de $X_n/\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}[X_n]$ lorsque $n \to \infty$ en justifiant bien la réponse. *Conseil : On pourra utiliser l'exercice ci-dessous.*

Theorème central limite multidimensionnel

Exercice 15. Soit X un vecteur gaussien n-dimensionnel de moyenne μ et matrice de covariance Σ_X. Si $v_1, \ldots, v_k$ est une famille orthonormale de vecteurs propres de Σ_X, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, donner la loi du vecteur $(v_1^T X, \ldots, v_k^T X)^T$. *Conseil : Pour se simplifier la vie, utiliser des matrices.*

Exercice 16. Soient $p_1, \ldots, p_k > 0$ tels que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. On note Y une v.a. sur $\{1, \ldots, k\}$ de loi $\mathbb{P}(Y = i) = p_i$ et on pose $X = (\mathbb{1}_{Y=1}, \ldots, \mathbb{1}_{Y=k})^T$, si bien que X suit la loi multinomiale de paramètres 1 et $p_1, \ldots, p_k$.

1. Si $X_1, X_2, \ldots$ sont iid de même loi que X, montrer que $(\sum_{i=1}^n X_i - (np_1, \ldots, np_k)^T)/\sqrt{n}$ tend en loi vers un vecteur gaussien Z dont on précisera la moyenne μ et la matrice de covariance Σ.
2. Donner un vecteur propre de la matrice Σ de valeur propre zéro. Que peut-on en déduire sur Z ?
3. Soit $D = \mathrm{diag}(p_1^{-1/2}, \ldots, p_k^{-1/2})$. Montrer que la matrice $D\Sigma D$ est la projection orthogonale sur l'espace $\mathbf{p}^\perp$, où $\mathbf{p} = (p_1^{1/2}, \ldots, p_k^{1/2})^T$.
4. En déduire la loi limite de $\|D(\sum_{i=1}^n X_i - (np_1, \ldots, np_k)^T)/\sqrt{n}\|_2^2$. *Conseil : Utiliser l'exercice ci-dessous.*