# Feuille de TD n° 9

# Chaînes de Markov.

## Mesures invariantes, périodicité, martingales, fonctions harmoniques.

*pour la semaine du 5 au 9 décembre*

**Exercice 1 (Chaîne de naissance et mort).** On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à espace d'états $\mathbb{N}$ et de matrice de transition $Q$ telle que

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la chaîne est irréductible si et seulement si $p_i > 0$ et $q_{i+1} > 0$ pour tout $i \geq 0$.

On suppose à partir de maintenant que la chaîne est irréductible. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_i = \inf\{n \geq 0 \mid X_n = i\} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{T}_i = \inf\{n > 0 \mid X_n = i\}.$$

De plus, étant donnés trois états $a$, $x$ et $b$ tels que $a \leq x \leq b$, on pose

$$u(x) = \mathbb{P}_x(T_a > T_b) \qquad \text{et} \qquad \gamma(x) = \begin{cases} \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. Montrer que $u(a) = 0$, $u(b) = 1$ et $u(x) = Qu(x) = q_x u(x-1) + r_x u(x) + p_x u(x+1)$ pour tout $a < x < b$. En déduire une relation entre $u(x+1) - u(x)$ et $u(x) - u(x-1)$ pour $a < x < b$, puis que
$$u(x) = \frac{\gamma(a) + \ldots + \gamma(x-1)}{\gamma(a) + \ldots + \gamma(b-1)}$$
pour $a \leq x \leq b$. Traiter le cas particulier où $p_x = q_x$ pour tout $x > 0$.
3. Montrer que $\mathbb{P}_1(T_0 = \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(T_0 > T_n)$. En déduire que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{x=0}^{\infty} \gamma(x) = \infty$.
4. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible $\zeta$ (avec $\zeta(0) = 1$) et déterminer $\zeta$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne admette une mesure de probabilité invariante. En déduire que la chaîne est récurrente positive si et seulement si
$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x} < \infty.$$
5. On considère le cas où $p_i = p > 0$ pour tout $i \geq 0$ et $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$ avec $p < q$. Calculer $\mathbb{E}_i(\widetilde{T}_i)$ pour tout $i \geq 0$.

**Exercice 2 (Une chaîne périodique).** On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\{0, \ldots, m-1\}$, $m \in \mathbb{N}^*$, de matrice de transition

$$Q(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \equiv x+1 \bmod m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

1. Montrer que la chaîne est irréductible.
2. Calculer $Q^n$ pour tout $n \geq \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer la période de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$.
4. Donner une probabilité stationnaire de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$. Y en a-t-il d'autres ?

**Exercice 3 (*Lazy chain*).** Soit $Q$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur un espace dénombrable $E$. On définit un processus $(Y_n)_{n\geq 0}$ comme suit : conditionnellement à $Y_0, \ldots, Y_n$, soit $Y'_{n+1}$ une v.a. de loi $Q(Y_n, \cdot)$, et $B_{n+1}$ une v.a. de loi $\mathcal{B}(p)$, indépendante de $Y'_{n+1}$, avec $p \in (0,1)$. On définit alors $Y_{n+1} = Y'_{n+1}$ si $B_{n+1} = 1$ et $Y_{n+1} = Y_n$ sinon.

1. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
2. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est irréductible si $(X_n)_{n\geq 0}$ l'est.
3. Montrer que $\mu$ est une mesure invariante pour $(Y_n)_{n\geq 0}$ si et seulement si $\mu$ est une mesure invariante pour $(X_n)_{n\geq 0}$.
4. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est apériodique.
5. Supposons que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible et récurrente positive. En déduire un résultat de convergence de $(Y_n)_{n\geq 0}$. Cette convergence a-t-elle lieu pour $(X_n)_{n\geq 0}$ également ?

**Exercice 4.** Soit $S$ un ensemble dénombrable. On note $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des applications bornées de $S$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $S$ de fonction de transition $Q = (Q(i,j))_{(i,j)\in S}$. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{H}$, la suite $(M_n^f)_{n\geq 0}$ définie par

$$M_0^f \;=\; f(X_0) \qquad \text{et} \qquad M_n^f \;=\; f(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} Af(X_i) \qquad \text{pour} \qquad n \geq 1$$

soit une martingale pour la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 0}$. *Remarque : On a utilisé ici la notation $Af = A(f)$.*

**Exercice 5 (Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet).** Soit $Q$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur un espace dénombrable $E$. On dit qu'une fonction $u : E \to \mathbb{R}$ est *harmonique en* $x \in E$ si

$$u(x) = \mathbb{E}_x[u(X_1)] = \sum_{y\in E} Q(x,y)u(y) =: Qu(x).$$

On dit que $u$ est *harmonique* si $u$ est harmonique en tout $x \in E$, càd quand $u = Qu$.

1. Soit $x \in E$ un état non-absorbant. Si $u$ est une fonction harmonique en $x \in E$, montrer que $u(x) \leq \sup\{u(y) \,|\, y \neq x, Q(x,y) > 0\}$ (le *principe du maximum*).
2. Montrer que $u$ est harmonique si est seulement si $(u(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ (sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$).
3. Soit $A \subset E$ et notons $T_{A^c} = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in A^c\}$. Montrer que le processus $(X_{n\wedge T_{A^c}})_{n\geq 0}$ est encore une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition $Q_A$. Montrer que toute fonction $u$ harmonique sur $A$ (càd harmonique en tout $x \in A$) est harmonique pour cette chaîne, càd $u = Q_A u$.
4. Soit $A \subset E$ fini et supposons que $\partial A = \{y \in A^c \,|\, \exists x \in A : Q(x,y) > 0\}$ est fini. Supposons de plus que $\mathbb{P}_x(T_{A^c} < \infty) = 1$ pour tout $x \in A$. Soit $u$ une fonction harmonique sur $A$. Montrer que les valeurs de $u$ sur $A$ sont déterminées par les valeurs de $u$ sur $\partial A$.

**Exercice 6 (Bonus : Fonctions harmoniques et propriété de Liouville).** On reprend les notations du dernier exercice. On dit que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est *Liouville* si les seules fonctions harmoniques bornées sont les constantes.

1. Supposons que la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente. Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est Liouville.
2. Pour tout $x \in E$, soit $X^x = (X_n^x)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de même loi que $(X_n)_{n\geq 0}$ sous $\mathbb{P}_x$ (càd, $X^x$ est une chaîne de Markov de noyau de transition $Q$ et $X_0^x = x$ p.s.) Supposons que pour tout $x, y \in E$ il existe un couplage de $X^x$ et $X^y$ tel que $X_n^x = X_n^y$ à partir d'un certain rang, presque sûrement. Montrer que la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est Liouville.
3. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ la *lazy chain* de $(X_n)_{n\geq 0}$ (voir Exercice 3), pour un $p \in (0,1)$ quelconque. Montrer que $u$ est harmonique pour $(X_n)_{n\geq 0}$ si et seulement si $u$ est harmonique pour $(Y_n)_{n\geq 0}$.
4. Construire un couplage comme dans la seconde partie de l'exercice pour une version *lazy* de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$. En déduire que la MAS sur $\mathbb{Z}^d$ est Liouville pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ (on dit alors aussi que le graphe $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, est Liouville).