Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 3

Tribu terminale, convergence presque sûre, lemme de Borel–Cantelli

pour la semaine du 3 au 7 octobre

Exercice 1 (Tribu terminale). Soit $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu cylindrique $\mathcal{A}$. On définit la suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_n(\omega) = \omega_n$. On rappelle la définition de la tribu terminale

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

On pourra vérifier *(optionnel)* que $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}$, avec $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A = \mathbb{R}^n \times A',\ A' \in \mathcal{A}\}$. Lesquels des événements suivants font partie de $\mathcal{T}$?

1. $A_1 = \{\limsup_{m\to\infty} X_m < \infty\}$
2. $A_2 = \{\lim X_m = 0\}$
3. $A_3 = \{X_m \neq 0\ \forall m \in \mathbb{N}\}$
4. $A_4 = \{X_m = X_{m+2}\ \forall m \in \mathbb{N}\}$
5. $A_5 = \{\limsup_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} X_k < \infty\}$
6. $A_6 = \{\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} X_k = 0\}$

Exercice 2. Soit Ω un ensemble.

1. Étant fixés $B, C \subset \Omega$, on pose $A_{2n} = B$ et $A_{2n+1} = C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de l'ensemble Ω. Montrer que $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$.
3. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de l'ensemble Ω. Montrer que $\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}$ et $\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}$. En déduire une inégalité entre $\mathbb{P}(\liminf A_n)$ et $\liminf \mathbb{P}(A_n)$, ainsi qu'entre $\mathbb{P}(\limsup A_n)$ et $\limsup \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements indépendants. On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ ainsi que $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ pour tout entier n. Donner une CNS sur la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$, puis étudier la convergence presque sûre (vers 0).

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles positives (pas nécéssairement indépendantes), montrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ converge en probabilité si et seulement si S_n converge p.s.

Exercice 5. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. iid de moyenne μ et variance finies. A l'aide de la loi forte des grands nombres, montrer que

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j \to \mu^2, \quad \text{presque sûrement.}$$

Exercice 6. Soit $(T_k)_{k\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $k \geq 2$, T_k suit la loi exponentielle de paramètre $\ln(k)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(T_k \geq 1)$, ainsi que $\mathbb{P}(T_k \geq 1 + \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
2. En déduire, à l'aide du lemme de Borel-Cantelli, que

$$\text{p.s.} \qquad \limsup_{k\to\infty} T_k = 1.$$

Exercice 7. Soient $X, X_1, X_2, \ldots$ des v.a. iid à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

1. En utilisant la formule $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\,dx$, montrer que pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X > an) < \infty.$$

2. Montrer que presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} X_n = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbb{E}[X] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X] = \infty, \end{cases}$$

Exercice 8 (Loi du logarithme itéré.). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On pose $h(x) = (2x \log\log x)^{1/2}$ pour $x \geq \mathrm{e}$. Le but de cet exercice est de montrer

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{h(n)} = 1, \quad \text{p.s..}$$

On admet les estimées suivantes :

$$\mathbb{P}(X_1 > x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} e^{-x^2/2}, \quad x \to \infty \tag{1}$$

$$\forall n \geq 1\, \forall x > 0 : \mathbb{P}(\max_{k\in\{1,\ldots,n\}} S_k > x) \leq 2\mathbb{P}(S_n > x). \tag{2}$$

1. Soit $K > 1$. Majorer la quantité $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq K h(K^{n-1})\right)$ et montrer que $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{h(n)} \leq K$ presque sûrement.
2. En déduire que $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{h(n)} \leq 1$ presque sûrement.
3. On fixe $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, $r < \sqrt{\frac{M-1}{M}}$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'événement A_k par

$$A_k = \{|S_{M^k} - S_{M^{k-1}}| \geq r h(M^k)\} \cap \{\mathrm{sgn}(S_{M^k} - S_{M^{k-1}}) = \mathrm{sgn}(S_{M^{k-1}})\}.$$

   Montrer que les événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants et que $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 1$.
4. En déduire que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{h(n)} \geq 1, \quad \text{p.s..}$$

5. A l'aide de la loi du 0-1 de Kolmogorov, déduire de la dernière partie que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{h(n)} \geq 1, \quad \text{p.s..}$$

6. Conclure.
7. *optionnel* : Montrer l'estimée (1).