Feuille de TD n° 3. Corrigé.

Exercice 1 (Tribu terminale).

1. Vrai. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\limsup_{m\to\infty} X_m = \limsup_{m\to\infty} X_{n+m}$. Par conséquent, $\limsup_{m\to\infty} X_m$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$, et donc $\{\limsup_{m\to\infty} X_m < \infty\} \in \mathcal{T}$.
2. Vrai (même raison que 1, $\lim_{m\to\infty} X_m$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
3. Faux. Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $A_3 = \mathbb{R} \times A$. Alors on aurait $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in A_3$ ssi $(0, \omega_1, \omega_2, \ldots) \in A_3$. Mais ceci est faux, car $(1, 1, \ldots) \in A_3$, mais $(0, 1, 1, \ldots) \notin A_3$.
4. Faux, car $(1, 1, \ldots) \in A_4$ mais $(0, 1, 1, \ldots) \notin A_4$. On raisonne alors comme dans 3.
5. Vrai. Posons $S_m = \sum_{k=0}^m X_k$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\limsup_{m\to\infty} S_m < \infty$ ssi $\limsup_{m\to\infty}(S_m - S_n) < \infty$. Or, $\limsup_{m\to\infty}(S_m - S_n)$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $A_5 \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $A_5 \in \mathcal{T}$.
6. Faux, car la première valeur influence la valeur de la somme. Formellement, on a $(0, 0, \ldots) \in A_6$, mais $(1, 0, 0, \ldots) \notin A_6$. On raisonne alors comme dans 3.

Exercice 2.

1. On a pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n \geq n_0} A_n = B \cap C$ et $\bigcup_{n \geq n_0} A_n = B \cup C$. Par conséquent,
$$\liminf A_n = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} A_n = B \cap C \quad \text{et} \quad \limsup A_n = \bigcap_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq n_0} A_n = B \cup C.$$
2. Par les règles de De Morgan,
$$(\liminf A_n)^c = \left(\bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} A_n \right)^c = \bigcap_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq n_0} A_n^c = \limsup A_n^c.$$
3. On a pour tout $\omega \in \Omega$,
$$\begin{aligned} \liminf \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \sup_{n_0 \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq n_0} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) &= \begin{cases} 1, & \text{si } \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : \omega \in A_n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_{\liminf A_n}(\omega). \end{aligned}$$

   Un raisonnement analogue donne l'égalité pour lim sup, mais on peut aussi la déduire de l'égalité précédente en remarquant que
$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\limsup A_n} &= 1 - \mathbb{1}_{(\limsup A_n)^c} \\ &= 1 - \mathbb{1}_{\liminf A_n^c} && \text{par la dernière partie} \\ &= 1 - \liminf \mathbb{1}_{A_n^c} && \text{par l'égalité pour } \liminf \\ &= 1 - \liminf(1 - \mathbb{1}_{A_n}) \\ &= 1 - (1 - \limsup \mathbb{1}_{A_n}) \\ &= \limsup \mathbb{1}_{A_n}. \end{aligned}$$

   On a alors par le lemme de Fatou
$$\mathbb{P}(\liminf A_n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\liminf A_n}] = \mathbb{E}[\liminf \mathbb{1}_{A_n}] \leq \liminf \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n}] = \liminf \mathbb{P}(A_n).$$

   Avec la dernière partie de l'exercice, ceci implique,
$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1 - \mathbb{P}(\liminf A_n^c) \geq 1 - \liminf \mathbb{P}(A_n^c) = 1 - (1 - \limsup \mathbb{P}(A_n)) = \limsup \mathbb{P}(A_n).$$

Exercice 3.

Convergence en probabilité :

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 &\iff \forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \to 0 && \text{par définition} \\ &\iff \mathbb{P}(X_n = 1) \to 0 && \text{car } X_n \in \{0,1\}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\iff p_n \to 0. \end{aligned}$$

Convergence presque sûre :

$$\begin{aligned} X_n \to 0 \quad \text{p.s.} &\iff \exists N \in \mathbb{N}^*\, \forall n \geq N : X_n = 0 \quad \text{p.s.} && \text{car } X_n \in \{0,1\}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\iff \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0 \\ &\iff \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n < \infty && \text{par le lemme de Borel–Cantelli.} \end{aligned}$$

Exercice 4. On sait dejà que la convergence p.s. entraîne la convergence en probabilité.

Réciproquement, supposons que S_n converge en probabilité vers une variable S. Alors la suite de v.a. $(R_n)_{n\geq 0}$ définie par $R_n = S - S_n = X_{n+1} + X_{n+2} + \dots$ converge en probabilité vers zéro. Or, comme les variables X_n sont positives, (R_n) est une suite décroissante minorée par zéro donc elle converge presque sûrement. Sa limite en probabilité étant zéro, sa limite presque sûre est aussi zéro.

Preuve alternative : Convergence en probabilité implique l'existence d'une sous-suite qui converge presque sûrement. Utiliser ensuite le fait que la suite est croissante pour conclure.

Exercice 5.

On a

$$2\sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j = \sum_{1\leq i\neq j\leq n} X_iX_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} X_iX_j - \sum_{i=1}^n X_i^2 = \left(\sum_{1\leq i\leq n} X_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Par la loi forte des grands nombres, on a quand $n\to\infty$,

$$\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{1\leq i\leq n} X_i\right)^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leq i\leq n} X_i\right)^2 \to \mu^2, \quad \text{p.s.}$$

De plus, puisque $\mathbb{E}[X_1^2] = \mathrm{Var}(X_1) + \mathbb{E}[X_1]^2 < \infty$ par hypothèse, on a, encore par la loi forte des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \to \mathbb{E}[X_1^2], \quad \text{p.s.},$$

et donc

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n X_i^2 \to 0, \quad \text{p.s.}$$

Ceci donne

$$\binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j = \frac{1}{n(n-1)}\left(\left(\sum_{1\leq i\leq n} X_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n X_i^2\right) \to \mu^2, \quad \text{p.s.}$$

Exercice 6.

1. Si E est une v.a. de loi exponentielle de paramètre λ, alors $\mathbb{P}(E > x) = e^{-\lambda x}$ pour tout $x \geq 0$. Par conséquent, $\mathbb{P}(T_k \geq 1) = e^{-\ln(k)} = 1/k$ et $\mathbb{P}(T_k \geq 1+\varepsilon) = e^{-(1+\varepsilon)\ln(k)} = 1/k^{1+\varepsilon}$.
2. Borne inférieure : Puisque $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(T_k \geq 1) = \sum_{k=1}^\infty 1/k = \infty$ et que les T_k, $k \geq 2$ sont indépendantes, la seconde partie du lemme de Borel–Cantelli implique que presque sûrement, $T_k \geq 1$ pour un nombre infini de k, et donc
$$\limsup_{k\to\infty} T_k \geq 1, \quad \text{p.s..}$$

Borne supérieure : Pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k \geq 1+\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{1+\varepsilon} < \infty$. Le première partie du lemme de Borel–Cantelli implique alors que p.s., $T_k \leq 1+\varepsilon$ pour tous sauf un nombre fini de k, et donc

$$\limsup_{k\to\infty} T_k \leq 1+\varepsilon, \quad \text{p.s..}$$

Puisque les événements $\{\limsup_{k\to\infty} T_k \leq 1+1/N\}$ sont décroissants en N, il vient

$$\mathbb{P}(\limsup_{k\to\infty} T_k \leq 1) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\limsup_{k\to\infty} T_k \leq 1+1/N) = 1.$$

En combinant les deux bornes, on obtient

$$\limsup_{k\to\infty} T_k = 1, \quad \text{p.s..}$$

Exercice 7.

1. Soit $a > 0$. On rappelle que $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\,dx$. Il vient que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a(n-1)}^{an} \mathbb{P}(X > x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} a\mathbb{P}(X \geq an),$$

puisque $\mathbb{P}(X \geq x)$ est décroissante en x. De même,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a(n-1)}^{an} \mathbb{P}(X > x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a\mathbb{P}(X \geq a(n-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} a\mathbb{P}(X \geq an).$$

Ce qui montre que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq an) = \infty \iff \mathbb{E}[X] = \infty$.

2. Puisque les X_n sont indépendantes, on peut appliquer les deux partie du lemme de Borel–Cantelli et la première partie de l'exercice done alors pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(\limsup\{X_n \geq an\}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbb{E}[X] < \infty \\ 1 & \text{si } \mathbb{E}[X] = \infty, \end{cases}$$

Pour finir, supposons d'abord que $\mathbb{E}[X] = \infty$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\limsup \frac{1}{n} X_n = \infty) &= \mathbb{P}(\bigcap_{N\in\mathbb{N}^*} \{X_n \geq Nn \text{ pour un nombre infini de } n\}) \\ &= \mathbb{P}(\bigcap_{N\in\mathbb{N}^*} \limsup_{n\to\infty}\{X_n \geq Nn\}) \\ &= 1,\end{aligned}$$

puisque l'intersection d'un nombre dénombrable d'ensembles de probabilité 1 a encore probabilité 1. De manière analogue, quand $\mathbb{E}[X] < \infty$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\limsup \frac{1}{n} X_n = 0) &= \mathbb{P}(\bigcap_{N\in\mathbb{N}^*} \{X_n < n/N \text{ pour tous sauf un nombre fini de } n\}) \\ &= \mathbb{P}(\bigcap_{N\in\mathbb{N}^*} \liminf_{n\to\infty}\{X_n < n/N\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{N\in\mathbb{N}^*} \limsup_{n\to\infty}\{X_n \geq n/N\}) \\ &= 1,\end{aligned}$$

puisque l'union d'un nombre dénombrable d'ensembles de probabilité 0 a encore probabilité 0. CQFD.

Exercice 8 (Loi du logarithme itéré.).

1. On a pour n assez grand,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\max_{0\leqslant k\leqslant K^n} S_k \geqslant Kh(K^{n-1})) &\leq 2\mathbb{P}(S_{\lfloor K^n\rfloor} \geq Kh(K^{n-1})) && \text{par l'estimée (2)}\\
&= 2\mathbb{P}(X_1 \geq Kh(K^{n-1})/\sqrt{\lfloor K^n\rfloor}) && \text{puisque } S_{\lfloor K^n\rfloor} \overset{\text{loi}}{=} \sqrt{\lfloor K^n\rfloor}X_1\\
&\leq 2\mathbb{P}(X_1 \geq K^{1-n/2}h(K^{n-1}))\\
&\leq 2\exp(-K^{2-n}K^{n-1}\log\log K^{n-1}) && \text{par l'estimée (1)}\\
&= 2((n-1)\log K)^{-K}
\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n=2}^{\infty}((n-1)\log K)^{-K} < \infty$, le lemme de Borel-Cantelli donne que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{\max_{0\leqslant k\leqslant K^n}(S_k/h(K^{n-1})) \geq K\}) = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{h(n)} > K) &\leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\max_{K^{n-1}\leq k\leq K^n}\frac{S_k}{h(K^{n-1})} \geq K\right\}\right) && \text{par croissance de } h\\
&\leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\max_{0\leq k\leq K^n}\frac{S_k}{h(K^{n-1})} \geq K\right\}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{h(n)} \leq K$ presque sûrement.

2. Par décroissance des événements, on a

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{h(n)} \leq 1) = \lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{h(n)} \leq 1 + 1/N) = 1,$$

par la partie précédente de l'exercice.

3. Montrons d'abord que les événements sont indépendants. Notons pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_k = \sigma(X_1,\ldots,X_{M^{k-1}})$ et $\overline{\mathcal{A}}_k = \sigma(X_{M^{k-1}+1},\ldots,X_{M^k})$, si bien que

$$A_1,\ldots,A_{k-1} \in \mathcal{A}_k \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_k \perp \overline{\mathcal{A}}_k,$$

puisque les X_n sont indépendantes. On décompose l'événement A_k en $A_k = B_k \cap C_k$ avec

$$\begin{aligned}
B_k &= \{|S_{M^k} - S_{M^{k-1}}| \geq rh(M^k)\} \in \overline{\mathcal{A}}_k\\
C_k &= \{\operatorname{sgn}(S_{M^k} - S_{M^{k-1}}) = \operatorname{sgn}(S_{M^{k-1}})\} \in \mathcal{A}_k \vee \overline{\mathcal{A}}_k.
\end{aligned}$$

On a alors pour toute v.a. réelle Y bornée et $\mathcal{A}_k$-mesurable,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{A_k}] &= \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{C_k}\mathbb{1}_{B_k}]\\
&= \sum_{s\in\{-1,1\}}\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{(\operatorname{sgn}(S_{M^{k-1}})=s)}\mathbb{1}_{(\operatorname{sgn}(S_{M^k}-S_{M^{k-1}})=s)}\mathbb{1}_{B_k}]\\
&= \sum_{s\in\{-1,1\}}\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{(\operatorname{sgn}(S_{M^{k-1}})=s)}]\cdot\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(\operatorname{sgn}(S_{M^k}-S_{M^{k-1}})=s)}\mathbb{1}_{B_k}] && (\mathcal{A}_k \perp \overline{\mathcal{A}}_k)\\
&= \sum_{s\in\{-1,1\}}\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{(\operatorname{sgn}(S_{M^{k-1}})=s)}]\frac{1}{2}\mathbb{P}(B_k) && (\text{symétrie de } S_{M^k} - S_{M^{k-1}})\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_k)\mathbb{E}[Y] && (\text{linéarité de l'espérance})\\
&= \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(C_k)\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

En particulier, en posant $Y \equiv 1$, on a $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(C_k)$, et donc

$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{A_k}] = \mathbb{E}[Y]\mathbb{P}(A_k).$$

Puisque $A_1, \dots, A_{k-1} \in \mathcal{A}_k$, ceci donne que A_k est indépendant de la famille $A_1, \dots, A_{k-1}$. Par récurrence, on obtient alors indépendance de la famille des événements A_k, $k \in \mathbb{N}^*$.
Calculons $\mathbb{P}(A_k)$. On a

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(C_k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_{M^k} - S_{M^{k-1}}| \geq rh(M^k)) = \mathbb{P}(X_0 \geq rh(M^k)/\sqrt{M^k - M^{k-1}}),$$

puisque $S_{M^k} - S_{M^{k-1}}$ est égale en loi à $\sqrt{M^k - M^{k-1}}X_0$ et $\mathbb{P}(|X_0| \geq x) = 2\mathbb{P}(X_0 \geq x)$ pour tout $x \geq 0$. Par définition de $h(n)$, on a

$$\begin{aligned} rh(M^k)/\sqrt{M^k - M^{k-1}} &= r\sqrt{2\frac{M^k}{M^k - M^{k-1}} \log\log M^k} \\ &= \sqrt{2r^2 \frac{M}{M-1} \log(k \log M)} \\ &= \sqrt{2\rho(\log k + \log\log M)}, \quad \text{avec } \rho = r^2\frac{M}{M-1} < 1. \end{aligned}$$

Par l'estimée (1), on obtient alors pour k assez grand, en supposant d'abord que $r \geq 1/2$ et donc $\rho > 1/8$,

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(X_0 \geq rh(M^k)/\sqrt{M^k - M^{k-1}}) \geq \frac{1}{\sqrt{8\pi\rho(\log k + \log\log M)}} e^{-\rho(\log k + \log\log M)},$$

et donc, puisque $e^{-\rho \log k} = k^{-\rho}$ avec $\rho < 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty.$$

Avec l'indépendance des A_k, le lemme de Borel–Cantelli donne alors $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 1$. Si $r < 1/2$, on borne par la probabilité du même événement mais avec r remplacé par $1/2$.

4. Soit $r \in [1/2, 1)$. Choisissons M assez large tel que $r < \sqrt{\frac{M-1}{M}}$. On définit alors A_k comme dans la partie précédente. On note que sur l'événement A_k, on a

$$|S_{M^k}| = |S_{M^k} - S_{M^{k-1}}| + |S_{M^{k-1}}| \geq |S_{M^k} - S_{M^{k-1}}| \geq rh(M^k).$$

Par l'exercice précédent, on obtient,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{h(n)} \geq r\right) &\geq \mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} \frac{|S_{M^k}|}{h(M^k)} \geq r\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} \left\{|S_{M^k}| \geq rh(M^k)\right\}\right) \\ &\geq \mathbb{P}(\limsup A_k) = 1. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{|S_n|}{h(n)} \geq 1\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left\{\limsup \frac{|S_n|}{h(n)} \geq 1 - 1/m\right\}\right) = 1.$$

5. Notons $E_+ = \{\limsup \frac{S_n}{h(n)} \geq 1\}$ et $E_- = \{\limsup \frac{-S_n}{h(n)} \geq 1\}$. Par la dernière partie, on a $\mathbb{P}(E_+ \cup E_-) = 1$. Par symétrie de la loi gaussienne, on a en plus $\mathbb{P}(E_+) = \mathbb{P}(E_-)$, donc $\mathbb{P}(E_+) \geq 1/2$. Mais puisque E_+ fait partie de la tribu terminale, la loi du 0-1 de Kolmogorov donne $\mathbb{P}(E_+) \in \{0, 1\}$ et donc $\mathbb{P}(E_+) = \mathbb{P}(E_-) = 1$.

6. Les résultats des parties 2 et 5 donnent

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{h(n)} = 1, \quad \text{p.s.}.$$

CQFD.