Feuille de TD n° 7

Convergence de martingales et théorème d'arrêt

pour la semaine du 21 au 25 novembre

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale avec $|X_{n+1}-X_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $M < \infty$ une constante. Soit

$$C = \{\lim X_n \text{ existe et est finie}\}$$
$$D = \{\limsup X_n = +\infty \text{ et } \liminf X_n = -\infty\}.$$

Montrer que $\mathbb{P}(C \cup D) = 1$.
Conseil : On pourra étudier la martingale arrêtée aux temps $T_K = \inf\{n \geq 0 : X_n \leq -K\}$ *et/ou* $T'_K = \inf\{n \geq 0 : X_n \geq K\}$ *pour* $K \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (Lemme de Borel–Cantelli). Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements avec $A_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\limsup A_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty \right\} \quad \text{presque sûrement.}$$

Conseil : utiliser le dernier exercice.

Exercice 3 (Quelques (contre-)exemples).

1. *Un exemple de martingale qui converge presque sûrement mais n'est pas bornée dans* L^1. On considère une famille $(Y_n, \varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout n, la loi de Y_n est $\frac{1}{2}(\delta_{a_n} + \delta_{-a_n})$, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs fixée, et la loi de ε_n est $\frac{1}{n^2}\delta_1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\delta_0$. On définit, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \varepsilon_1, \ldots, Y_n, \varepsilon_n)$ et $M_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k Y_k$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ et qu'elle converge presque sûrement. Montrer qu'on peut choisir $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que cette martingale ne soit pas bornée dans L^1.

2. *Un exemple de martingale qui tend presque sûrement vers* $+\infty$. On considère $(\xi_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\xi_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

On pose $M_n = \xi_2 + \ldots + \xi_n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 2}$ est une martingale telle que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty$.

Exercice 4 (Sommes aléatoires). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une famille de v.a. i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels tels que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Montrer que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ converge p.s.

Exercice 5 (Théorème de Rademacher). L'objectif de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n}$ et $Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n)\right)$.

1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : [0,1) \to [0,1)$, $x \mapsto \lfloor 2^n x \rfloor 2^{-n}$. Si $x \in [0,1)$, de décomposition dyadique minimale[1] $x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k}$ avec $b_k \in \{0,1\}$, $k \geq 1$, montrer que $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{-k}$. En déduire que $\varphi_k \circ \varphi_n = \varphi_k$, pour $0 \leq k \leq n$.

2. Montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$

1. On dit qu'une décomposition dyadique est *minimale* s'il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$, tel que $b_k = 1\, \forall k \geq n$, i.e. si $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k 2^{-k} < 2^{-n}$ pour tout n.

3. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
4. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite presque sûre et dans L^1 de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée telle que $Z = g(X)$.
5. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que
$$\text{p.s.} \qquad Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$
6. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u.$$

Exercice 6 (Martingales exponentielles de la marche aléatoire). Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où $X_1, X_2, \ldots$ sont iid avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Nous rappelons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $W_n(\theta) = \exp(\theta S_n)/\cosh(\theta)^n$ est une martingale.

1. Montrer que $W_n(\theta) \to 0$ p.s. quand $n \to \infty$, pour tout $\theta \neq 0$. En déduire que la martingale $W_n(\theta)$ n'est pas uniformément intégrable.
2. Soit T_1 le premier temps d'atteinte de 1 par la marche, i.e. $T_1 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 1\}$. Pour $\theta \geq 0$, montrer que
$$\mathbb{E}[\cosh(\theta)^{-T_1}] = e^{-\theta}.$$
3. Montrer que $\mathbb{E}[W_{T_{-1}}(\theta)] = e^{-2\theta}$ pour tout $\theta \geq 0$.
4. Quand $\lambda \downarrow 0$, montrer que $1 - \mathbb{E}[e^{-\lambda T_1}] \sim C\sqrt{\lambda}$, pour une constante $C > 0$ à préciser.
Pour info : la fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}[e^{-\lambda T_1}]$ s'appelle la transformée de Laplace *de T_1. Le résultat ci-dessus permet de montrer, par le biais d'un « théorème tauberien », que $\mathbb{P}(T_1 > k) \sim C'/\sqrt{k}$ pour une constante $C' > 0$.*
5. Pour tout $\gamma \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, montrer que $Z_n(\gamma) = \cos(\gamma S_n)/\cos(\gamma)^n$ est une martingale (on pourra par exemple utiliser la partie 1 pour des $\theta \in \mathbb{C}$).
6. Pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, soit $T_{-a,a} = T_{-a} \wedge T_a$. Montrer que les martingales $(Z_{n\wedge T_{-a,a}}(\frac{\pi}{2a}))_{n\geq 0}$ et $(Z_n(\frac{\pi}{2a}))_{n\geq 0}$ ne sont pas uniformément intégrables.
7. En déduire que
$$\mathbb{E}[\cos\left(\tfrac{\pi}{2a}\right)^{-T_{-a,a}}] = \infty.$$
8. Montrer que pour tout $\gamma \in]-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}[$, $\mathbb{E}[Z_{T_{-a,a}}(\gamma)] \leq \mathbb{E}[Z_0(\gamma)] = 1$, et par conséquent,
$$\mathbb{E}[\cos(\gamma)^{-T_{-a,a}}] < \infty.$$
9. Donner une constante $\lambda_a \in \mathbb{R}$, telle que
$$\mathbb{E}[e^{\lambda T_{-a,a}}] < \infty \quad \iff \quad \lambda < \lambda_a.$$
Donner un équivalent de λ_a quand $a \to \infty$.

Exercice 7 (Modèle de Wright-Fisher). On a une population de taille fixée $N \in \mathbb{N}^*$ qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type a ou A. Chaque individu de la génération $n+1$ choisit son (seul) parent de la génération n de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite le type du parent.

On note X_n le nombre d'individus de type a dans la génération n et $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. On a alors $\mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, \mathcal{F}_n) = \binom{N}{i}(\frac{X_n}{N})^i(1-\frac{X_n}{N})^{N-i}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$. On suppose que p.s. $X_0 = k \in \{0, \ldots, N\}$.

1. Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une martingale et discuter la convergence de X_n vers une variable X_∞ quand $n \to \infty$.
2. Montrer que $M_n := (\frac{N}{N-1})^n X_n(N - X_n)$ est une martingale.
3. Calculer $\mathbb{E}[X_\infty]$ et $\mathbb{E}[X_\infty(N - X_\infty)]$.
4. Calculer la loi de X_∞ et commenter.

Exercice 8 (Un jeu de cartes). On prend un jeu de 52 cartes, on les retourne une à une ; le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire "rouge la prochaine !", il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd. On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire.

1. Soit R_n (pour $0 \leq n \leq 51$) le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'événement {la n-ième carte retournée est rouge}. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1}|R_n = j)$, pour $j \in \{0, \dots, 26\}$, $n \in \{0, \dots, 50\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, \mathcal{F}_n)$, où $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$, $n \in \{0, \dots, 50\}$, $j \in \{0, \dots, 26\}$. Montrer que
$$\mathbb{E}[R_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52 - n}, \quad n = 0, \dots, 50.$$
Montrer que $X_n := R_n/(52 - n)$, $n = 0, \dots, 50$, est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et que $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n)$.
3. On définit $\tau = n \in \{0, \dots, 52\}$ si le joueur dit "rouge la prochaine !" avant de retourner la $(n + 1)$-ième carte. On suppose que τ est un temps d'arrêt (pourquoi ?). Montrer que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}[X_\tau]$ et la calculer.