Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 9. Corrigé.

Exercice 1 (Chaîne de naissance et mort).

1. Si $p_i > 0$ et $q_{i+1} > 0$ pour tout $i \geq 0$, alors on a $i \leftrightsquigarrow i+1$ pour tout $i \geq 0$ et donc par transitivité, $i \leftrightsquigarrow j$ pour tout $i < j$. La chaîne est donc irréductible. En revanche, si $p_k = 0$ pour un certain $k \geq 0$, alors on a $Q(i,j) = 0$ pour tout $i \leq k$ et $j > k$. Ceci montre que $i \not\rightsquigarrow j$ pour tout $i \leq k$ et $j > k$, et donc la chaîne n'est pas irréductible. Si $q_{i+1} = 0$ pour un $i \geq 0$, on fait un raisonnement analogue.
2. Il vient de la définition de u que $u(a) = 0$ et $u(b) = 1$. Soit $a < x < b$. Alors,
$$u(x) = \mathbb{P}_x(T_a > T_b) = \sum_y \mathbb{P}_x(T_a > T_b \,|\, X_1 = y)\mathbb{P}_x(X_1 = y).$$
Puisque $x \notin \{a,b\}$, on a $T_a \geq 1$ et $T_b \geq 1$ presque sûrement sous $\mathbb{P}_x$, et donc $T_a = T_a \circ \theta + 1$ et $T_b \circ \theta + 1$ p.s. La propriété de Markov donne alors
$$\mathbb{P}_x(T_a > T_b \,|\, X_1 = y) = \mathbb{P}_x(T_a \circ \theta > T_b \circ \theta \,|\, X_1 = y) = \mathbb{P}_y(T_a > T_b) = u(y).$$
Par conséquent,
$$u(x) = \sum_y Q(x,y)u(y) = Qu(x).$$
Dans notre cas, cela donne
$$u(x) = q_x u(x-1) + r_x u(x) + p_x u(x+1),$$
ce qui, en écrivant $u(x) = 1 \times u(x) = (q_x + r_x + p_x)u(x)$, donne
$$(q_x + p_x)u(x) = q_x u(x-1) + p_x u(x+1), \quad \text{et donc} \quad u(x+1) - u(x) = \frac{q_x}{p_x}(u(x) - u(x-1)).$$
Par récurrence, cela donne
$$\forall a \leq x < b : u(x+1) - u(x) = \frac{\gamma(x)}{\gamma(a)}(u(a+1) - u(a)) = C\gamma(x),$$
avec $C = (u(a+1) - u(a))/\gamma(a) = u(a+1)/\gamma(a)$. En sommant cette égalité, on obtient ainsi pour $a \leq x \leq b$,
$$u(x) = u(x) - u(a) = \sum_{y=a}^{x-1} u(y) - u(y+1) = C \sum_{y=a}^{x-1} \gamma(y).$$
Ceci est en particulier vrai pour $x = b$, ce qui donne
$$1 = u(b) = C \sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y),$$
et donc $C = (\sum_{x=a}^{b-1} \gamma(x))^{-1}$. Ceci donne finalement,
$$u(x) = \frac{\sum_{y=a}^{x-1} \gamma(y)}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y)}.$$
Dans le cas particulier où $p_x = q_x$ pour tout $x \geq 1$, on a $\gamma(x) = 1$ pour tout $x \geq 0$, et donc
$$u(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$
3. Considérons l'événement $\{T_0 = \infty\}$. On a $\mathbb{P}_1$-presque sûrement $T_n \geq n-1$ pour tout $n \geq 1$; si bien que
$$\{T_0 = \infty\} = \lim_{n\to\infty} \{T_0 > n\} \supset \lim_{n\to\infty} \{T_0 > T_n\}, \quad \mathbb{P}_1\text{-p.s.}$$
Pour l'autre inégalité, on remarque que $T_n < \infty$ p.s., car soit la chaîne est récurrente, dansquel cas chaque état est visité un nombre infini de fois (irréductibilité !), soit la chaîne est transiente, dansquel cas elle tend

vers ∞ p.s. et donc doit passer par l'état n, les seules transitions étant $x \to x+1$ et $x \to x-1$. Par conséquent, on a trivialement, $\mathbb{P}_1(T_0 = \infty) \leq \mathbb{P}_1(T_0 > T_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec ce qui précède, cela donne

$$\mathbb{P}_1(T_0 = \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(T_0 > T_n).$$

La dernière partie nous donne alors

$$\mathbb{P}_1(T_0 = \infty) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{y=0}^{n-1} \gamma(y)\right)^{-1} = \left(\sum_{y=0}^{\infty} \gamma(y)\right)^{-1}.$$

Par conséquent, $\mathbb{P}_1(T_0 = \infty) = 0$ si et seulement si $\sum_{y=0}^{\infty} \gamma(y) = \infty$.
Pour montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{y=0}^{\infty} \gamma(y) = \infty$, il suffit par irréductibilité de montrer que 0 est un état récurrent, donc que $\mathbb{P}_0(\widetilde{T}_0 = \infty) = 0$ si et seulement si $\sum_{y=0}^{\infty} \gamma(y) = \infty$. Or, puisque $Q(0, i) = 0$ pour tout $i \geq 2$, la propriété de Markov donne,

$$\mathbb{P}_0(\widetilde{T}_0 = \infty) = \mathbb{P}_0(\widetilde{T}_0 = \infty,\, X_1 = 0) + \mathbb{P}_0(\widetilde{T}_0 = \infty,\, X_1 = 1) = 0 + p_0 \mathbb{P}_1(T_0 = \infty),$$

et puisque $p_0 > 0$, cela montre que $\mathbb{P}_0(\widetilde{T}_0 = \infty) = 0$ si et seulement si $\sum_{y=0}^{\infty} \gamma(y) = \infty$.

4. Une mesure μ est réversible si et seulement si pour tous $x, y \geq 0$,

$$\mu(x)Q(x, y) = \mu(y)Q(y, x)$$

Puisque $Q(x, y) = 0$ dès lors que $|x - y| \geq 2$ et puisque l'égalité est triviale si $x = y$ il suffit de la vérifier dans le cas $|x - y| = 1$, où, en échangeant les rôles de x et y, dans le cas $y = x + 1$. On a alors

$$\mu(x)Q(x, x + 1) = \mu(x + 1)Q(x + 1, x) \iff \mu(x + 1) = \frac{p_x}{q_{x+1}}\mu(x).$$

Par récurrence, cela montre que μ est réversible si et seulement si

$$\mu(x) = \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x}\mu(0),$$

et donc il existe une seule mesure réversible ζ avec $\zeta(0) = 1$ donnée par $\zeta(x) = \frac{p_0\cdots p_{x-1}}{q_1\cdots q_x}$ pour $x \geq 0$ (avec la convention qu'un produit sur un ensemble vide vaut 1).
Si $M := \sum_{x=0}^{\infty} \frac{p_0\cdots p_{x-1}}{q_1\cdots q_x} < \infty$, alors la mesure $\pi = \zeta/M$ est une mesure de probabilité réversible et donc invariante. Par irréductibilité, ceci montre que la chaîne de Markov est récurrente positive. Inversement, si la chaîne est récurrente positive, alors il existe une mesure de probabilité invariante π. Par un théorème du cours, on sait qu'une chaîne de Markov récurrente et irréductible admet une unique mesure invariante (modulo multiplication par une constante), et donc $\zeta = C\pi$ pour une constante $C \geq 0$. Par conséquent, on a

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x} = \sum_{x=0}^{\infty} \zeta(x) = C\sum_{x=0}^{\infty} \pi(x) = C < \infty.$$

5. Dans le cas présent, on a par l'hypothèse $p < q$,

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x} = \sum_{x=0}^{\infty} (p/q)^x < \infty.$$

On est alors dans le cas récurrent positif. Soit π la mesure de probabilité invariante de la partie précédente. On a alors d'après un théorème du cours, pour tout $i \geq 0$,

$$\mathbb{E}_i[T_i] = \frac{1}{\pi(i)} = \frac{\sum_{x=0}^{\infty}(p/q)^x}{(p/q)^i} = \frac{(q/p)^i}{1 - p/q}.$$

Exercice 2 (Une chaîne périodique).

1. Pour un entier n, notons n mod m son reste pour la division par m. On a alors $i \rightsquigarrow (i+1)$ mod m pour tout i. Par récurrence, on a $i \rightsquigarrow (i+k)$ mod m pour tout $k \geq 1$. Par conséquent, $i \leftrightsquigarrow j$ pour tout $i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$ et donc la chaîne est irréductible.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $i, j \in \{0, \dots, m-1\}$. On a pour tout chemin $x_0, \dots, x_n$,
$$\prod_{k=1}^{n} Q(x_{k-1}, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k \equiv x_{k-1} + 1 \bmod m \text{ pour tout } k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Le seul chemin $i = x_0, \dots, x_n$ tel que $x_k \equiv x_{k-1} + 1 \bmod m$ pour tout k est le chemin $x_k = i + k \bmod m$. Ce chemin satisfait $x_n = j$ si et seulement si $j = i + k \bmod m$. Il vient,
$$\begin{aligned} Q^n(i,j) &= \sum_{i=x_0,\dots,x_n=j} \prod_{k=1}^{n} Q(x_{k-1}, x_k) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \equiv x + n \bmod m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}. \end{aligned}$$
3. On a pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$,
$$Q^n(i,i) > 0 \iff i \equiv i + n \mod m \iff n \equiv 0 \mod m \iff m | n.$$
Par conséquent, on a pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$,
$$\operatorname{pgcd}(\{n \in \mathbb{N}^* : Q^n(i,i) > 0\}) = m,$$
et donc la période de la chaîne est m.
4. Soit μ la probabilité uniforme sur $\{0, \dots, m-1\}$. Alors pour tout $j \in \{0, \dots, m-1\}$,
$$\mu Q(j) = \sum_{i=0}^{m-1} \mu(i) Q(i,j) = \mu(j - 1 \bmod m) = \mu(j).$$
Par irréductibilité, la probabilité stationnaire est unique et donc il n'y en a pas d'autres.

Exercice 3 (*Lazy chain*).

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y \in E$,
$$\mathbb{P}_x(Y_{n+1} = y \,|\, Y_0, \dots, Y_n) = \mathbb{P}_x(Y'_{n+1} = y,\ B_{n+1} = 1 \,|\, Y_0, \dots, Y_n) + \mathbb{P}_x(Y_n = y,\ B_{n+1} = 0 \,|\, Y_0, \dots, Y_n).$$
Puisque B_{n+1} et Y'_{n+1} sont indépendantes conditionellement à $Y_0, \dots, Y_n$, de lois respectives $\mathcal{B}(p)$ et $Q(Y_n, \cdot)$, on a
$$\mathbb{P}_x(Y'_{n+1} = y,\ B_{n+1} = 1 \,|\, Y_0, \dots, Y_n) = pQ(Y_n, y).$$
De plus, puisque $\mathbb{1}_{(Y_n = y)}$ est mesurable par rapport à $Y_0, \dots, Y_n$, on a
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(Y_n = y,\ B_{n+1} = 0 \,|\, Y_0, \dots, Y_n) &= \mathbb{1}_{(Y_n = y)} \mathbb{P}_x(B_{n+1} = 0 \,|\, Y_0, \dots, Y_n) \\ &= (1-p) \mathbb{1}_{(Y_n = y)}. \end{aligned}$$
Par conséquent,
$$\mathbb{P}_x(Y_{n+1} = y \,|\, Y_0, \dots, Y_n) = (pQ + (1-p)\,\mathrm{Id})(Y_n, y),$$
et donc $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $Q_p := pQ + (1-p)\,\mathrm{Id}$.
2. Puisque $Q_p \geq pQ$, on a $Q_p^n \geq (pQ)^n = p^n Q^n$. Par conséquent, puisque $p > 0$, on a $Q_p^n(x,y) > 0$ si $Q^n(x,y) > 0$, et donc $\sum_{n=0}^{\infty} Q_p^n(x,y) > 0$ si $\sum_{n=0}^{\infty} Q^n(x,y) > 0$. Ceci montre que $(Y_n)_{n \geq 0}$ est irréductible si $(X_n)_{n \geq 0}$ l'est.
3. Soit μ une mesure sur E. Puisque $p > 0$, on a
$$\mu Q = \mu \iff p\mu Q = p\mu \iff p\mu Q + (1-p)\mu = p\mu + (1-p)\mu \iff \mu Q_p = \mu,$$
et donc μ est invariante pour $(Y_n)_{n \geq 0}$ si et seulement si μ est invariante pour $(X_n)_{n \geq 0}$.
4. Soit $x \in E$. Puisque $p < 1$, on a $Q_p(x,x) \geq (1-p)\,\mathrm{Id}(x,x) > 0$. Par conséquent,
$$\operatorname{pgcd}(\{n \in \mathbb{N}^* : Q_p^n(x,x) > 0\}) = 1,$$
et donc la chaîne est apériodique.

5. Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible et récurrente positive, alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ l'est également, par les deux premières parties de l'exercice. De plus, par la dernière partie de l'exercice, $(Y_n)_{n\geq 0}$ est apériodique. Par un théorème du cours, Y_n converge alors en loi vers la probabilité stationnaire quand $n \to \infty$.
   Cette convergence n'a pas forcément lieu pour $(X_n)_{n\geq 0}$ quand celle-ci est périodique, la chaîne de l'Exercice 2 en donne un exemple.

Exercice 4. Pour une fonction $f \in \mathcal{H}$, notons $Qf(x) = \sum_{y\in E} Q(x,y)f(y)$, ce qui définit un opérateur linéaire Q sur $\mathcal{H}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\mathbb{E}_x[(f(X_n) - f(X_{n-1}))\,|\,X_0,\dots,X_{n-1}] = \sum_{y\in E} Q(X_{n-1},y)f(y) - f(X_{n-1}) = (Q - \mathrm{Id})f(X_{n-1}).$$

Par conséquent, avec l'operateur linéaire $A := Q - \mathrm{Id}$, le processus M_n^f est une martingale pour la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 5 (Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet).

1. Puisque x est non-absorbant, l'ensemble $\{y \in E : y \neq x,\ Q(x,y) > 0\}$ n'est pas vide. Par définition de l'harmonicité, on a alors

$$\begin{aligned}(1 - Q(x,x))u(x) &= Qu(x) - Q(x,x)u(x)\\ &= \sum_{y\in E,\ y\neq x} Q(x,y)u(y)\\ &= \sum_{y\in E,\ y\neq x,\ Q(x,y)>0} Q(x,y)u(y)\\ &\leq \sup\{u(y)\,|\,y\neq x, Q(x,y)>0\} \sum_{y\in E,\ y\neq x,\ Q(x,y)>0} Q(x,y)\\ &= \sup\{u(y)\,|\,y\neq x, Q(x,y)>0\}(1 - Q(x,x)),\end{aligned}$$

   où la dernière égalité provient du fait que $\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$ pour tout $x \in E$. Puisque x est non-absorbant, on a $1 - Q(x,x) > 0$, ce qui donne

$$u(x) \leq \sup\{u(y)\,|\,y\neq x, Q(x,y)>0\}.$$

2. Si $(u(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ (sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$), alors $\mathbb{E}_x(u(X_1)) = \mathbb{E}_x(u(X_0)) = x$ pour tout $x \in E$, et donc u est harmonique. Inversement, si u est harmonique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{E}_x[u(X_n)\,|\,\mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{y\in E} Q(X_{n-1},y)u(y) = Qu(X_{n-1}) = u(X_{n-1}),$$

   par l'harmonicité de u. Par conséquent, $(u(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$.

3. On sait que T_{A^c} est un temps d'arrêt, et donc $\{T_{A^c} \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{T_{A^c} > n\} \in \mathcal{F}_n$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_{n+1\wedge T_{A^c}} = y\,|\,\mathcal{F}_n) &= \mathbb{P}_x(X_{n+1} = y\,|\,\mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{(T_{A^c}>n)} + \mathbb{P}_x(X_{n\wedge T_{A^c}} = y\,|\,\mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{(T_{A^c}\leq n)}\\ &= Q(X_{n\wedge T_{A^c}},y)\mathbb{1}_{(T_{A^c}>n)} + \mathbb{1}_{(X_{n\wedge T_{A^c}}=y)}\mathbb{1}_{(T_{A^c}\leq n)}\end{aligned}$$

   Par définition de T_{A^c}, on a $T_{A^c} > n$ si et seulement si $X_{n\wedge T_{A^c}} \in A$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_{n+1\wedge T_{A^c}} = y\,|\,\mathcal{F}_n) &= Q(X_{n\wedge T_{A^c}},y)\mathbb{1}_{(X_{n\wedge T_{A^c}}\in A)} + \mathbb{1}_{(X_{n\wedge T_{A^c}}=y)}\mathbb{1}_{(X_{n\wedge T_{A^c}}\in A^c)}\\ &= Q_A(X_{n\wedge T_{A^c}},y),\end{aligned}$$

   avec

$$Q_A(x,y) = \begin{cases} Q(x,y), & x\in A\\ \mathrm{Id}(x,y), & x \in A^c\end{cases}.$$

   Puisque $\sigma(X_{0\wedge T_{A^c}},\dots,X_{n\wedge T_{A^c}}) = \mathcal{F}_{n\wedge T_{A^c}} \subset \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a également

$$\mathbb{P}_x(X_{n+1\wedge T_{A^c}} = y\,|\,\mathcal{F}_{n\wedge T_{A^c}}) = Q_A(X_{n\wedge T_{A^c}},y).$$

   Par conséquent, le processus $(X_{n\wedge T_{A^c}})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q_A.
   Si u est harmonique sur A, alors on a pour tout $x \in A$: $Q_Au(x) = Qu(x) = u(x)$, et pour tout $x \in A^c$: $Q_Au(x) = \mathrm{Id}\,u(x) = u(x)$. Par conséquent, $Q_Au = u$ et donc u est harmonique pour la chaîne $(X_{n\wedge T_{A^c}})_{n\geq 0}$.

4. Soit u harmonique sur A. Alors d'après la dernière partie de l'exercice, u est harmonique pour la chaîne $(X_{n\wedge T_{A^c}})_{n\geq 0}$. Par la deuxième partie de l'exercice, $(u(X_{n\wedge T_{A^c}}))_{n\geq 0}$ est alors une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_{n\wedge T_{A^c}})_{n\geq 0}$, pour tout $x\in E$. Fixons $x\in A$. Puisque $X_{n\wedge T_{A^c}}$ prend valeurs dans $A\cup\partial A$, $\mathbb{P}_x$-p.s. pour tout $n\in\mathbb{N}$, et que $A\cup\partial A$ est un ensemble fini, la martingale $(u(X_{n\wedge T_{A^c}}))_{n\geq 0}$ est bornée dans L^∞ et donc une martingale fermée sous $\mathbb{P}_x$. Notons $X_{\infty\wedge T_{A^c}}$ sa limite (dans L^1 et p.s.) et notons que $X_{\infty\wedge T_{A^c}} = X_{T_{A^c}}$ quand $X_{T_{A^c}} < \infty$.
Par hypothèse, on a $\mathbb{P}_x(T_{A^c} < \infty) = 1$. De plus, par définition de ∂A, $\mathbb{P}_x(X_{T_{A^c}} \in \partial A,\ T_{A^c} < \infty) = 1$. Par conséquent,
$$u(x) = \mathbb{E}_x[u(X_{\infty\wedge T_{A^c}})] = \mathbb{E}_x[u(X_{T_{A^c}})\mathbb{1}_{(X_{T_{A^c}}\in\partial A,\ T_{A^c}<\infty)}].$$
Il en suit que $u(x)$ est déterminée par les valeurs de u sur ∂A. Puisque $x\in A$ était arbitraire, ceci permet de conclure.

Exercice 6 (Bonus : Fonctions harmoniques et propriété de Liouville).

1. Soit u une fonction harmonique bornée. Par l'Exercice 5.2, le processus $(u(X_n))_{n\geq 0}$ est alors une martingale bornée. Fixons un élément $0\in E$ quelconque. Soit T_0 le temps d'atteinte de 0. Puisque la chaîne de Markov est récurrente, on a $\mathbb{P}_x(T_0 < \infty) = 1$ pour tout $x\in E$. Par le théorème d'arrêt (u est bornée !), on a alors
$$\forall x\in E : u(x) = \mathbb{E}_x[u(X_0)] = \mathbb{E}_x[u(X_{T_0})] = u(0).$$
Ceci montre que u est constante et que la chaîne est Liouville.
2. Soit u une fonction harmonique bornée. Soit $x,y\in E$. Par l'Exercice 5.2, on a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u(x) = \mathbb{E}[X_n^x]$ et $u(y) = \mathbb{E}[X_n^y]$. En particulier,
$$|u(x)-u(y)| = \limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}[u(X_n^x)] - \mathbb{E}[u(X_n^y)]|.$$
Par hypothèse, on peut coupler X^x et X^y de telle façon que
$$\mathbb{P}(\exists N\ \forall n\geq N : X_n^x = X_n^y) = 1.$$
En particulier, on a $\mathbb{P}(X_n^x = X_n^y)\to 1$ quand $n\to\infty$, et donc
$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &= \limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}[u(X_n^x)] - \mathbb{E}[u(X_n^y)]|\\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \|u\|_\infty \mathbb{P}(X_n^x \neq X_n^y)\\ &= 0.\end{aligned}$$
Ceci montre que u est constante et que la chaîne est Liouville.
3. Soit u une fonction. Puisque $p>0$, on a
$$Q_p u = u \iff pQu + (1-p)u = u \iff pQu = pu \iff Qu = u,$$
ce qui donne le résultat.
4. Nous décrivons d'abord en mots ce que nous allons faire avant de l'écrire formellement : on considère la version *lazy* de la MAS avec $p = 1/2$. Nous pouvons alors coupler les marches X^x et X^y de la façon suivante. A chaque pas, nous choisissons la même coordonnée pour les deux marches. Si X^x et X^y coïncident en cette coordonnée, on les fait bouger pareil. Sinon, on fait bouger l'une des deux au hasard, et l'autre reste sur place. En utilisant la récurrence de la MAS sur $\mathbb{Z}$, on peut ainsi faire converger chacune des d coordonnées, si bien que $X_n^x = X_n^y$ à partir d'un certain rang.
Maintenant formellement : Soit $x,y\in\mathbb{Z}^d$. Soit $(U_n,B_n,J_n)_{n\geq 0}$ une famille iid de couples aléatoires de loi $\mathrm{Unif}(\{1,\dots,d\})\otimes\mathcal{B}(1/2)\otimes(\delta_{-1}+\delta_1)/2$. Notons $v(k)$ la k-ième coordonnée d'un vecteur v. Notons également $\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_d$ la b.o.n. usuelle de $\mathbb{R}^d$. On définit alors
$$\begin{aligned}X_0^x &= x, &\quad \forall n\in\mathbb{N} : X_{n+1}^x &= X_n^x + J_n \mathrm{e}_{U_n}\mathbb{1}_{(B_n=1)}\\ X_0^y &= y, &\quad \forall n\in\mathbb{N} : X_{n+1}^y &= X_n^y + J_n \mathrm{e}_{U_n}\big(\mathbb{1}_{(B_n=1,\ X_n^y(U_n)=X_n^x(U_n))} + \mathbb{1}_{(B_n=0,\ X_n^y(U_n)\neq X_n^x(U_n))}\big)\end{aligned}$$
Alors $(X_n^x)_{n\geq 0}$ est évidemment une version *lazy* (avec $p = 1/2$) de la MAS sur $\mathbb{Z}^d$. Montrons que $(X_n^y)_{n\geq 0}$ en est une aussi. Si
$$\mathcal{F}_n = \sigma((U_k,B_k,J_k),\ k = 1,\dots,n-1),$$

alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B_n = 1,\ X_n^y(U_n) = X_n^x(U_n) \,|\, \mathcal{F}_n) + \mathbb{P}(B_n = 0,\ X_n^y(U_n) \neq X_n^x(U_n) \,|\, \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{P}(B_n = 1 \,|\, \mathcal{F}_n)\mathbb{P}(X_n^y(U_n) = X_n^x(U_n) \,|\, \mathcal{F}_n) + \mathbb{P}(B_n = 0 \,|\, \mathcal{F}_n)\mathbb{P}(X_n^y(U_n) \neq X_n^x(U_n) \,|\, \mathcal{F}_n) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(X_n^y(U_n) = X_n^x(U_n) \,|\, \mathcal{F}_n) + \mathbb{P}(X_n^y(U_n) \neq X_n^x(U_n) \,|\, \mathcal{F}_n)\Big) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \{\pm \mathrm{e}_1, \dots, \pm \mathrm{e}_d\}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1}^y - X_n^y = j \,|\, \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{P}(J_n \mathrm{e}_{U_n} = j \,|\, \mathcal{F}_n)\Big(\mathbb{P}(B_n = 1,\ X_n^y(U_n) = X_n^x(U_n) \,|\, \mathcal{F}_n) + \mathbb{P}(B_n = 0,\ X_n^y(U_n) \neq X_n^x(U_n) \,|\, \mathcal{F}_n)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(J_n \mathrm{e}_{U_n} = j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2d}.
\end{aligned}$$

Cela donne aussi

$$\mathbb{P}(X_{n+1}^y - X_n^y = 0 \,|\, \mathcal{F}_n) = 1 - \sum_j \mathbb{P}(X_{n+1}^y - X_n^y = j \,|\, \mathcal{F}_n) = \frac{1}{2}.$$

Puisque $\sigma(X_0^y, \dots, X_n^y) \subset \mathcal{F}_n$, cela montre que $(X_n^y)_{n \geq 0}$ est bien une version *lazy* (avec $p = 1/2$) de la MAS sur $\mathbb{Z}^d$.

Etudions à présent le processus $(D_n)_{n \geq 0} = (X_n^x - X_n^y)_{n \geq 0}$. Notons d'abord que par construction,

$$X_{n+1}^x - X_{n+1}^y = X_n^x - X_n^y + J_n \mathrm{e}_{U_n} \mathbb{1}_{(X_n^y(U_n) \neq X_n^x(U_n))},$$

et donc

$$D_{n+1} = D_n + J_n \mathrm{e}_{U_n} \mathbb{1}_{(D_n(U_n) \neq 0)}.$$

En particulier, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, $D_{n+1}(k) - D_n(k) \in \{-1, 0, 1\}$. De plus, pour $i \in \{-1, 1\}$, on a

$$\mathbb{P}(D_{n+1}(k) - D_n(k) = i \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(U_n = k)\mathbb{P}(J_n = i)\mathbb{1}_{(D_n(k) \neq 0)} = \frac{1}{2d}\mathbb{1}_{(D_n(k) \neq 0)}.$$

Le processus $(D_n(k))_{n \geq 0}$ est alors une version *lazy* (avec $p = 1/d$) de la MAS sur $\mathbb{Z}$, arrêtée quand elle atteint 0. On sait que la MAS sur $\mathbb{Z}$ est récurrente, montrons que sa version *lazy* l'est aussi. Ceci est en fait vrai en généralité, car, avec la notation de l'Exercice 3, on a

$$\begin{aligned}
\sum_n Q_p^n &= \sum_n (pQ + (1-p)\mathrm{Id})^n \\
&= \sum_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} Q^k \\
&= \sum_k Q^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{p} \sum_k Q^k,
\end{aligned}$$

par une égalité du cours.

On déduit que presque sûrement, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, $D_n(k)$ atteint 0 en un temps fini T_k et y reste. Par conséquent, on a $X_n^x = X_n^y$ pour $n \geq \max_{k=1,\dots,n} T_k$, et donc notre couplage est bien un couplage comme dans la partie 2 de l'exercice.

Par la partie 2 de l'exercice, on en déduit que la version *lazy* ($p = 1/2$) de la MAS sur $\mathbb{Z}^d$ est Liouville. Mais par la partie 3, cela implique que la MAS sur $\mathbb{Z}^d$ est également Liouville.