Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 6. Corrigé.

Filtrations, temps d'arrêt

Exercice 1 (Temps d'arrêt).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$\{S \wedge T > n\} = \{S > n\} \cap \{T > n\} \in \mathcal{F}_n,$$
car S et T sont des temps d'arrêts et $\mathcal{F}_n$ est une tribu. Par conséquent, $S \wedge T$ est un temps d'arrêt. De manière analogue,
$$\{S \vee T \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n,$$
et donc $S \vee T$ est un temps d'arrêt. Finalement,
$$\{S + T = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{S = k\} \cap \{T = n - k\} \in \mathcal{F}_n,$$
car $\{S = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ et $\{T = n - k\} \in \mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_n$ pour tout $k \leq n$.

2. Par définition, $\mathcal{F}_T$ consiste en les événements $A \subset \mathcal{F}$, tels que $A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n. Or, $\{T \leq n\} = \emptyset$ if $n < p$ and $= \Omega$ if $n \geq p$. Donc, $A \in \mathcal{F}_T$ si et seulement si $A \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq p$. Cela donne $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_p$, puisque $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq p$.

3. Soit $A \in \mathcal{F}_S$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $\{T \leq n\} \subset \{S \leq n\}$,
$$A \cap \{T \leq n\} = (A \cap \{S \leq n\}) \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n,$$
puisque $(A \cap \{S \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$ (définition de $\mathcal{F}_S$) et $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ (T est temps d'arrêt). Par conséquent, $A \in \mathcal{F}_T$.

4. Par la dernière partie, $\mathcal{F}_{S\wedge T}$ est contenue dans $\mathcal{F}_S$ et $\mathcal{F}_T$, et donc $\mathcal{F}_{S\wedge T} \subset \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. Il suffit alors de démontrer l'autre inclusion. Soit $A \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A \cap \{S \wedge T \leq n\} = (A \cap \{S \leq n\}) \cup (A \cap \{T \leq n\}) \in \mathcal{F}_n,$$
puisque $A \in \mathcal{F}_S$ et $A \in \mathcal{F}_T$. Par conséquence, $A \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$ et donc $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{S\wedge T}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\{S < T\} \cap \{T = n\} = \{S \leq n - 1\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{S < T\} \cap \{S = n\} = \{S = n\} \cap \{T > n\} \in \mathcal{F}_n$, car S et T sont des temps d'arrêt. Par conséquent, $\{S < T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
Par symétrie, $\{T < S\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, et puisque $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ est une tribu, $\{S = T\} = \{S < T\}^c \cap \{T < S\}^c \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors puisque $T_k \in \mathbb{N}$ pour tout k,
$$\begin{aligned}\{\limsup T_k \leq n\} &= \{\text{tous sauf un nombre fini de } T_k \leq n\} \\ &= \liminf_{k\to\infty} \{T_k \leq n\} \in \mathcal{F}_n,\end{aligned}$$
car $\mathcal{F}_n$ est une tribu et $\{T_k \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout k. Par conséquent, $\limsup T_k$ est un temps d'arrêt. De la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\{\liminf T_k > n\} &= \{\text{tous sauf un nombre fini de } T_k > n\} \\ &= \liminf_{k\to\infty} \{T_k > n\} \in \mathcal{F}_n,\end{aligned}$$
si bien que $\liminf T_k$ est un temps d'arrêt.

Exercice 2.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{T > n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq X_0\} \in \mathcal{F}_n,$$

car $\{X_i \leq X_0\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq X_0\}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq X_0\}} \,\Big|\, X_0\right]\right]$$
$$= \mathbb{E}[X_0^n] = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Exercice 3 (Principe de réflexion).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la définition de l'inf,

$$\{T_x > n\} = \{\forall k \in \{1, \dots, n\} : S_k < x\} = \{\max_{k \leq n} S_k < x\},$$

et donc par passage au complémentaire, $\{T_x \leq n\} = \{\max_{k \leq n} S_k \geq x\}$. En particulier, $\{T_x \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, puisque $\max_{k \leq n} S_k$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

2. Puisque $\max_{k \leq n} S_k \geq S_n$, on a inclusion des événements $\{S_n \geq x\} \subset \{\max_{k \leq n} S_k \geq x\}$. L'inclusion énoncée suit alors de la dernière partie.

3. Par la dernière partie,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \geq x) &= \mathbb{P}(S_n \geq x,\, T_x \leq n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n \geq x,\, T_x = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n - S_k \geq x - S_k,\, T_x = k)\end{aligned}$$

Puisque $S_k \geq x$ sur l'événement $\{T_x = k\}$, cela donne

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \geq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n - S_k \geq 0,\, T_x = k).$$

4. Par la symétrie de la loi de X_1 et le fait que les v.a. $(X_i)_{i \geq 1}$ sont iid, les v.a. $(-X_i)_{i \geq 1}$ sont également iid et de même loi que X_1. Par conséquent,

$$S_n - S_k = X_{k+1} + \cdots + X_n \overset{\text{loi}}{=} (-X_{k+1}) + \cdots + (-X_n) = -(S_n - S_k),$$

et donc la loi de $S_n - S_k$ est également symétrique.

5. On a $S_n - S_k = X_{k+1} + \cdots + X_n$, si bien que $S_n - S_k$ est indépendante de $\mathcal{F}_k$ par l'indépendance des v.a. $(X_i)_{i \geq 1}$. Ceci donne

$$\mathbb{P}(S_n - S_k \geq 0 \,|\, \mathcal{F}_k) = \mathbb{P}(S_n - S_k \geq 0) \geq 1/2,$$

où la dernière égalité provient de la symétrie de la loi de $S_n - S_k$.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq x) &\geq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n - S_k \geq 0,\, T_x = k) && \text{(partie 3)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_n - S_k \geq 0} \mathbf{1}_{T_x = k}]\\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_n - S_k \geq 0} \,|\, \mathcal{F}_k] \mathbf{1}_{T_x = k}] && (\{T_x = k\} \in \mathcal{F}_k \text{ car } T_x \text{ temps d'arrêt})\\
&\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{T_x = k}] && \text{(partie 5)}\\
&= \frac{1}{2} \mathbb{P}(T_x \leq n)\\
&= \frac{1}{2} \mathbb{P}(\max_{k \leq n} S_k \geq x) && \text{(partie 1).}
\end{aligned}$$

Ceci donne l'inégalité souhaitée.

Martingales

Exercice 4. Puisque $|M_n \vee N_n| \leq |M_n| \vee |N_n| \leq |M_n| + |N_n|$, la v.a. $M_n \vee N_n$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus,

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \vee N_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \geq \mathbb{E}[M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \geq M_n,$$

car M est une sous-martingale. Le même argument donne $\mathbb{E}[M_{n+1} \vee N_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \geq N_n$. Il suit,

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \vee N_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \geq M_n \vee N_n,$$

ce qui montre que $M \vee N$ est une sous-martingale.

Exercice 5 (Décomposition de Doob d'une sous-martingale). On sait d'après le cours que pour tout processus adapté et intégrable $(M_n)_{n\geq 0}$ il existe un (p.s.) unique processus prévisible $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(M_n - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et $A_0 = 0$. Ce processus est défini par $A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n \,|\, \mathcal{F}_n]$ pour tout $n \geq 0$. Il suffit alors de vérifier que $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissant dans notre cas, ce qui découle du fait que M est une sous-martingale :

$$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] - M_n \geq M_n - M_n = 0.$$

Exercice 6 (Inégalité maximale pour les surmartingales positives).

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $(H_n)_{n\geq 0}$ est prévisible et borné,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(H \cdot X)_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(H \cdot X)_n + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n]\\
&= (H \cdot X)_n + H_{n+1} \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n].
\end{aligned}$$

   Puisque X est une surmartingale, on a $\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \leq 0$. Puisque H_n est positif, cela donne $\mathbb{E}[(H \cdot X)_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq (H \cdot X)_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $H \cdot X$ est une surmartingale.

2. On pose $H_n = \mathbb{1}_{n \geq T}$. On a alors,

$$X_{T\wedge n} = X_0 + \sum_{k=1}^{n\wedge T} (X_k - X_{k-1}) = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1}) \mathbb{1}_{k \leq T} = X_0 + (H \cdot X)_n.$$

   De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = 1 - \mathbb{1}_{T \leq n-1}$, ce qui est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. Donc, H est un processus prévisible et positif. Par la dernière partie, $H \cdot X$ est alors une sur-martingale. Puisque X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, cela implique que $X_{T\wedge n} = X_0 + (H \cdot X)_n$ en est également une.

3. On remarque d'abord qu'il suffit de montrer que pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n > a\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X_0]}{a}.$$

Car, cela donne pour tout $0 < a' < a$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n \geq a\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n > a'\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X_0]}{a'},$$

et donc, par continuité du terme de droite dans la dernière inégalité,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X_0]}{a}.$$

Soit $T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n > a\}$, si bien que $\{\sup_{n\geq 0} X_n > a\} = \{T_a < \infty\}$. On a alors

$$a\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n > a\right) = \mathbb{E}[a\mathbb{1}_{T_a<\infty}] \leq \mathbb{E}[X_{T_a}\mathbb{1}_{T_a<\infty}].$$

Puisque $(X_n)_{n\geq 0}$ est positive, on a par le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}[X_{T_a}\mathbb{1}_{T_a<\infty}] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_{n\wedge T_a}\mathbb{1}_{T_a<\infty}] \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{n\wedge T_a}\mathbb{1}_{T_a<\infty}].$$

D'après 2., $(X_{n\wedge T_a})_{n\geq 0}$ est encore une surmartingale. Avec la positivité de $(X_n)_{n\geq 0}$, cela donne pour tout n,

$$\mathbb{E}[X_{n\wedge T_a}\mathbb{1}_{T_a<\infty}] \leq \mathbb{E}[X_{n\wedge T_a}] \leq \mathbb{E}[X_0].$$

Ensemble, les inégalités ci-dessus donnent

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n > a\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X_0]}{a}.$$

CQFD.

Exercice 7 (Martingales de carrés intégrables).

1. Soit $0 \leq m < n$. On a alors

$$\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(X_m - X_{m-1})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}](X_m - X_{m-1})],$$

car $X_m - X_{m-1}$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable et $X_k X_l \in L^1$ pour tout k, l. Puisque $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, on a $\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$ ce qui donne $\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(X_m - X_{m-1})] = 0$.

2. Soit $-1 \leq m \leq n$. Par la première partie de l'exercice, on a $X_i - X_{i-1} \perp_{L^2} X_j - X_{j-1}$ pour tout $0 \leq j < i$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_n - X_m)^2] &= \|X_n - X_m\|_2^2 \\
&= \left\| \sum_{i=m+1}^{n} (X_i - X_{i-1}) \right\|_2^2 \\
&= \sum_{i=m+1}^{n} \|X_i - X_{i-1}\|_2^2 \\
&= \sum_{i=m+1}^{n} \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^2].
\end{aligned}$$

3. Par la dernière partie de l'exercice, on a $\mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^2]$. Ceci montre que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2] < \infty.$$

Ceci donne l'équivalence entre a) et b).

Exercice 8 (Processus de Galton–Watson). On rappelle que par définition, on a $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_{n+1,i}$, où $(\xi_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de v.a. iid selon μ. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\xi_{n+1,i})_{i\in\mathbb{N}}$ est indépendante de $\mathcal{F}_n$. On a alors

$$\mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = m^{-n-1}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{X_n} \xi_{n+1,i}|\mathcal{F}_n] = m^{-n-1}\sum_{i=1}^{X_n} \mathbb{E}[\xi_{n+1,i}] = m^{-n}X_n = W_n.$$

Ici, la deuxième égalité se justifie par l'Exercice 2 de la feuille n° 5 avec $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = (\xi_{n+1,i})_{i\in\mathbb{N}}$ (dans cet exercice, la fonction f est supposée bornée, mais on peut tronquer la somme à un entier K, faire tendre $K \to \infty$ et utiliser la positivité des v.a. et convergence monotone pour conclure). L'intégrabilité de W_n en découle en remarquant que $\mathbb{E}[W_{n+1}] = \mathbb{E}[W_n]$ pour tout n (par positivité, l'espérance est bien définie), et donc $\mathbb{E}[W_n] = \mathbb{E}[W_0] = 1 < \infty$. Ceci montre que $(W_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

Pour montrer qu'elle est bornée dans L^2, on note que pour tout $n \in \mathbb{N}$, par indépendance,

$$\mathrm{Var}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) = m^{-2n-2}\,\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{X_n} \xi_{n+1,i}|\mathcal{F}_n) = m^{-2n-2}\sum_{i=1}^{X_n} \mathrm{Var}(\xi_{n+1,i}) = m^{-n-2}\sigma^2 W_n,$$

où la deuxième égalité se justifie encore par l'Exercice 2 de la feuille n° 5, en utilisant la définition de la variance conditionnelle en fonction de l'espérance conditionnelle. En particulier, puisque $W_n = \mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n]$,

$$\mathbb{E}[(W_{n+1} - W_n)^2] = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n)] = m^{-n-2}\sigma^2.$$

Puisque $m > 1$, on a alors

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[(W_{n+1} - W_n)^2] < \infty,$$

si bien que la martingale $(W_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans L^2 par le dernier exercice.

Exercice 9 (Variation quadratique d'une martingale).

1. Puisque M est une martingale et la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, un théorème du cours nous dit que $(M_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.
2. Par la définition du processus $\langle M\rangle$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n = \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2 \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - \mathbb{E}[M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n]^2 \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathrm{Var}(M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n).$$
3. Puisque $(M_n^2 - \langle M\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}[M_n^2] - \mathbb{E}[\langle M\rangle_n] = \mathbb{E}[M_n^2 - \langle M\rangle_n] = \mathbb{E}[M_0^2] - \mathbb{E}[\langle M\rangle_0] = \mathbb{E}[M_0^2],$$
puisque $\langle M\rangle_0 = 0$ par définition. Ceci donne l'égalité souhaitée.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned}
\langle M^T\rangle_{n+1} - \langle M^T\rangle_n &= \mathbb{E}[(M^T)_{n+1}^2 - (M^T)_n^2 \,|\, \mathcal{F}_n] && \text{par définition de } \langle M^T\rangle\\
&= \mathbb{E}[M_{T\wedge(n+1)}^2 - M_{T\wedge n}^2 \,|\, \mathcal{F}_n]\\
&= \mathbb{E}[(M_{T\wedge(n+1)}^2 - M_{T\wedge n}^2)\mathbf{1}_{T>n} \,|\, \mathcal{F}_n] && \text{car } M_{T\wedge(n+1)} = M_{T\wedge n} \text{ sur } \{T \leq n\}\\
&= \mathbb{E}[M_{T\wedge(n+1)}^2 - M_{T\wedge n}^2 \,|\, \mathcal{F}_n]\mathbf{1}_{T>n} && \text{car } \{T > n\} \in \mathcal{F}_n \text{ puisque } T \text{ temps d'arrêt}\\
&= \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2 \,|\, \mathcal{F}_n]\mathbf{1}_{T>n}\\
&= (\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n)\mathbf{1}_{T>n} && \text{par définition de } \langle M\rangle.
\end{aligned}$$
De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
\langle M\rangle_{n+1}^T - \langle M\rangle_n^T &= \langle M\rangle_{T\wedge(n+1)} - \langle M\rangle_{T\wedge n}\\
&= (\langle M\rangle_{T\wedge(n+1)} - \langle M\rangle_{T\wedge n})\mathbf{1}_{T>n} && \text{car } \langle M\rangle_{T\wedge(n+1)} = \langle M\rangle_{T\wedge n} \text{ sur } \{T \leq n\}\\
&= (\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n^T)\mathbf{1}_{T>n}.
\end{aligned}$$
Ceci donne
$$\langle M\rangle_{n+1}^T - \langle M\rangle_n^T = \langle M^T\rangle_{n+1} - \langle M^T\rangle_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Puisque $\langle M\rangle_0^T = \langle M\rangle_0 = 0 = \langle M^T\rangle_0$, cela montre l'égalité souhaitée.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n = \mathrm{Var}(M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}[(M_{n+1}-M_n)^2\,|\,\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}^2\,|\,\mathcal{F}_n].$$
Puisque $\mathcal{F}_n = \sigma(M_1,\dots,M_n) = \sigma(X_1,\dots,X_n)$, la v.a. X_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$, si bien que
$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2\,|\,\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}^2] = \mathbb{E}[X_1^2] =: \sigma^2.$$
On obtient alors
$$\langle M\rangle_n = \sigma^2 n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 10 (Martingales exponentielles de la marche aléatoire). On a pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}[W_{n+1}(\theta)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\theta S_n}}{\cosh(\theta)^n}\frac{e^{\theta X_{n+1}}}{\cosh(\theta)}\Big|\mathcal{F}_n\right] = \frac{e^{\theta S_n}}{\cosh(\theta)^n}\mathbb{E}\left[\frac{e^{\theta X_{n+1}}}{\cosh(\theta)}\right] = W_n(\theta)\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2\cosh(\theta)} = W_n(\theta).$$

Exercice 11 (Processus de Poisson).

1. Il suffit de montrer que pour tous $0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_n = s < t$, $N_t - N_s$ est indépendante de $\sigma(N_{s_1},\dots,N_{s_n})$ et de loi $\mathrm{Po}(\lambda(t-s))$. Or, presque sûrement, $N_{s_{k+1}} - N_{s_k} = \Pi([s_k, s_{k+1}))$ pour tout $k = 1,\dots,n-1$, ou alors,
$$N_{s_k} = \sum_{i=1}^{k-1}\Pi([s_i,s_{i+1})), \quad \text{p.s.}, \quad k = 1,\dots,n.$$
L'énoncé découle alors de l'Exercice 14 de la feuille n° 5 du TD.
2. Soit $0 \le s \le t$. On a $\mathbb{E}[N_t - N_s\,|\,\mathcal{F}_s] = \lambda(t-s)$. Par conséquent,
$$\mathbb{E}[N_t - \lambda t\,|\,\mathcal{F}_s] = N_s - \lambda s + \mathbb{E}[N_t - N_s\,|\,\mathcal{F}_s] - \lambda(t-s) = N_s - \lambda s,$$
et donc avec $f(t) = \lambda t$, $(N_t - f(t))_{t\ge 0}$ est une martingale.
De plus,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(N_t-\lambda t)^2\,|\,\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(N_t - N_s - \lambda(t-s) + N_s - \lambda s)^2\,|\,\mathcal{F}_s]\\ &= \mathbb{E}[(N_t - N_s - \lambda(t-s))^2\,|\,\mathcal{F}_s] + 2(N_s-\lambda s)\mathbb{E}[N_t - N_s - \lambda(t-s)\,|\,\mathcal{F}_s] + (N_s-\lambda s)^2\\ &= \mathrm{Var}(N_t - N_s) + 0 + (N_s - \lambda s)^2\\ &= \lambda(t-s) + (N_s-\lambda s)^2.\end{aligned}$$
Par conséquent, avec $g(t) = f(t) = \lambda t$, $((N_t - f(t))^2 - g(t))_{t\ge 0}$ est une martingale.
Finalement, on a pour tout $0 \le s \le t$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{\theta(N_t - N_s)}] = e^{\lambda(t-s)(e^\theta - 1)} < \infty$. Par conséquent,
$$\mathbb{E}[e^{\theta N_t}\,|\,\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{\theta N_s}e^{\theta(N_t-N_s)}\,|\,\mathcal{F}_s] = e^{\theta N_s}\mathbb{E}[e^{\theta(N_t-N_s)}\,|\,\mathcal{F}_s] = e^{\theta N_s}e^{\lambda(t-s)(e^\theta-1)},$$
et donc avec $h_\theta(t) = \lambda t(e^\theta - 1)$, le processus $(e^{\theta N_t - h_\theta(t)})_{t\ge 0}$ est une martingale.
3. Si $N_t - \lambda t$ converge p.s. quand $t\to\infty$, alors $(N_n - \lambda n)/\sqrt{n}$ converge vers 0, p.s. et donc aussi en loi quand $n\to\infty$. Mais par le TCL, $(N_n-\lambda n)/\sqrt{n}$ converge en loi quand $n\to\infty$ vers la loi non-dégénérée $\mathcal{N}(0,\lambda)$. Par conséquent, $N_t - \lambda t$ ne converge pas p.s.
De manière similaire, si $(N_t-\lambda t)^2 - \lambda t$ converge p.s. quand $t\to\infty$, alors $((N_n-\lambda n)^2 - \lambda n)/t$ converge vers 0, p.s. et donc aussi en loi quand $n\to\infty$. Mais $((N_n-\lambda n)^2-\lambda n)/n = ((N_n-\lambda n)/\sqrt{n})^2 - \lambda$ converge en loi vers la v.a. non-dégénérée $X^2-\lambda$, où $X\sim\mathcal{N}(0,\lambda)$. Par conséquent, $(N_t-\lambda t)^2 - \lambda t$ ne converge pas p.s. quand $t\to\infty$.
En ce qui concerne la martingale $M_t^\theta = e^{\theta N_t - \lambda t(e^\theta-1)}$, on note d'abord que si $\theta = 0$, alors $M_t^\theta = 1$ pour tout $t \ge 0$ et donc $M_t^\theta \to 1$ quand $t\to\infty$. Supposons alors que $\theta\ne 0$. Par la loi des grands nombres $N_n/(\lambda n)\to 1$ p.s. quand $n\to\infty$, et puisque $N_{\lfloor t\rfloor} \le N_t \le N_{\lceil t\rceil}$ pour tout $t\ge 0$, on a également
$$N_t/(\lambda t) \to 1 \text{ p.s. quand } t\to\infty.$$
Puisque $e^\theta - 1 > \theta$ pour $\theta \ne 0$, ceci implique que
$$\theta N_t - \lambda t(e^\theta - 1) \to -\infty \text{ p.s. quand } t\to\infty.$$
Par conséquent, $M_t^\theta \to 0$ p.s. quand $t\to\infty$.