Recueil d'exercices 2

Exercice 1. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires uniformes sur $[0, 2\pi[$. Soit $\mathcal{F}_n$ la filtration associée à cette famille. Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé tel que $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, nous définissons le processus suivant à valeurs dans $\mathbb{C}$ par récurrence :

$$\begin{cases} Z_0 = z \\ Z_{n+1} = Z_n + \mathrm{Im}(Z_n)e^{iU_{n+1}} \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que le système se réécrit, pour $z = x + iy$, sous la forme

$$X_0 = x \qquad\qquad Y_0 = y$$
$$X_{n+1} = X_n + Y_n \cos(U_{n+1}) \qquad\qquad Y_{n+1} = Y_n(1 + \sin(U_{n+1}))$$

2. Montrer que (Z_n) est une martingale complexe (i.e. montrer que $X_n = \mathrm{Re}(Z_n)$ et $Y_n = \mathrm{Im}(Z_n)$ sont des martingales). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(Z_n) > 0$ p.s.
3. Montrer que (Y_n) tend vers 0 p.s. La martingale (Y_n) est-elle fermée ?
4. Montrez que $\mathbb{E}(\sqrt{|X_{n+1} - X_n|}) \leq yr^n$ avec un $r < 1$.
5. Soit a tel que $r^2 < a < 1$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup\{|X_{n+1} - X_n| \geq a^n\}) = 0$. Conclure quant à la convergence de X_n vers une variable X_∞.
6. Nous souhaitons calculer la loi de X_∞. Pour cela, nous introduisons $M_n(\lambda) = \exp(i\lambda X_n - |\lambda|Y_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que M_n est une martingale et montrer que $|M_n(\lambda)| \leq 1$ p.s. (On pourra admettre le fait que $\mathbb{E}[\exp(ze^{iU}) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $U \sim \mathrm{Unif}(0, 2\pi)$). En déduire l'expression de $\mathbb{E}(e^{i\lambda X_\infty})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et donner la loi de X_∞.
7. Aurions-nous pu avoir $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$?

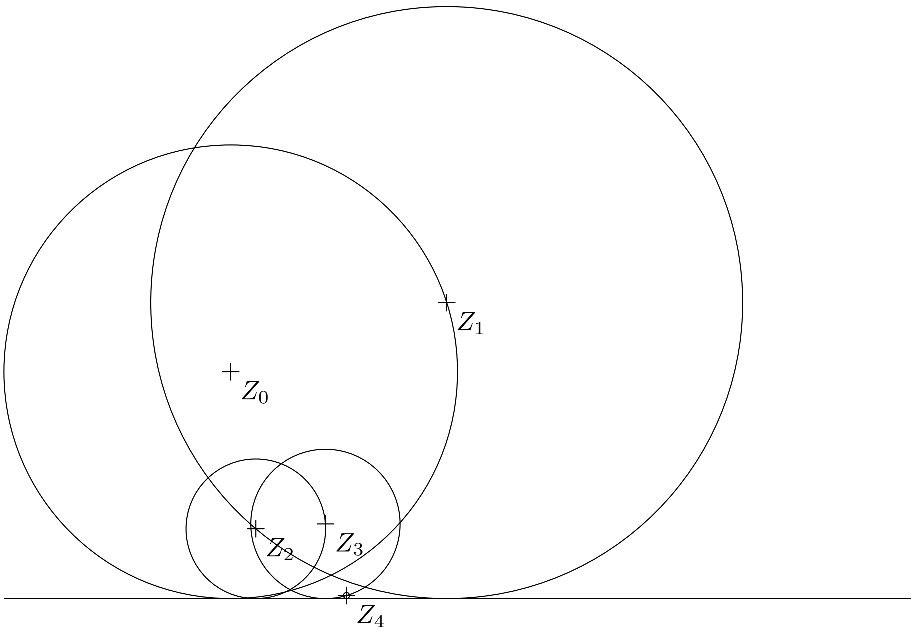

FIGURE 1 – Une trajectoire typique pour $z = i$.

Exercice 2 (Algorithme de Metropolis).

Cet exercice montre comment on peut construire une chaîne de Markov ayant une probabilité stationnaire fixée à l'avance. Soit E un ensemble d'états fini et P une matrice de transition sur E symétrique et irréductible. Soit π une probabilité sur E telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. On définit sur E une nouvelle matrice de transition Q par

$$Q(x,y) = \begin{cases} \alpha(x,y)P(x,y) & \text{si } x \neq y, \\ 1 - \sum_{z \neq x} Q(x,z) & \text{si } y = x, \end{cases} \qquad \text{où} \quad \alpha(x,y) = \min\left(\frac{\pi(y)}{\pi(x)}, 1\right).$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

1. Montrer que la loi π est réversible pour Q et donc invariante.
2. Montrer que Q est irréductible.
3. On suppose que π n'est pas la distribution uniforme (sinon $Q = P$). On note M l'ensemble des états $x \in E$ tels que $\pi(x) = \max_{y\in E} \pi(y)$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in M$ tel que $P(x_0, y) > 0$ pour un certain $y \notin M$. En déduire que $Q(x_0, z) < P(x_0, z)$ pour un $z \in E$ au moins. Que peut-on dire de $Q(x_0, x_0)$?
   (b) Montrer que Q est apériodique (même si P ne l'était pas).
   (c) Que peut-on en déduire sur la loi de X_n ?
4. On définit l'algorithme suivant :

   Initialisation : donner la valeur de X_1
   Pour i *de 1 à* $n-1$
   - *simuler* V *selon une loi* $P(X_i, .)$
   - *simuler* U *uniforme sur* $[0,1]$ *indépendante de* V
   - *si* $U \leq \alpha(X_i, V)$ *alors poser* $X_{i+1} = V$ *sinon poser* $X_{i+1} = X_i$

   Montrer que cet algorithme permet de simuler des variables $X_1, \ldots, X_n$ de transition Q.

Remarque : En prenant n grand, cet algorithme est utilisé pour simuler une variable aléatoire de loi π, en particulier lorsque cette probabilité n'est connue qu'à une constante de proportionnalité près.