Feuille de TD n° 5
Espérance conditionnelle

pour la semaine du 31 octobre au 4 novembre

Propriétés générales

Exercice 1. Soit $X \in L^1$, $\mathcal{F}$ une tribu et $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ une classe d'ensembles stable par intersection finie qui engendre $\mathcal{F}$ et qui contient Ω. Montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ est l'unique (p.s.) variable aléatoire intégrable et $\mathcal{F}$-mesurable telle que $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_C] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\mathbb{1}_C]$ pour tout $C \in \mathcal{C}$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes (à valeurs dans des espaces quelconques) et $f \in L^1(\mu_X \otimes \mu_Y)$. Montrer que

$$\mathbb{E}[f(X,Y)\,|\,X] = \mathbb{E}[f(\cdot,Y)](X) \left(= \int f(X,y)\,\mu_Y(dy)\right)$$

Exercice 3. Soit Y une variable aléatoire réelle intégrable définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$. On suppose que les tribus $\sigma(Y) \vee \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont indépendantes. Montrer que

$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}_1].$$

Conseil : Utiliser l'Exercice 1.

Exercice 4. On dit que deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$?
2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z, $\mathcal{G}$-mesurable, positive, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$

   et aussi à : pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

   Conseil : Exercice 1 pour la dernière égalité.

Exercice 5 (Théorème de la variance totale). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $X \in L^2$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ des tribus.

1. Montrer que pour tout $Y \in L^2$ on a

$$\mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]Y\,|\,\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]\,|\,\mathcal{G}].$$

2. Montrer qu'on a

$$\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])\,\big|\,\mathcal{G}\big] = 0, \quad \text{p.s.}$$

3. On définit la *variance de X conditionnellement à $\mathcal{F}$* :

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2\,|\,\mathcal{F}].$$

   Montrer le théorème de la variance totale :

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\,|\,\mathcal{G}) + \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{F})\,|\,\mathcal{G}].$$

   Donner une preuve plus simple quand $\mathcal{G}$ est la tribu triviale, en utilisant le fait que $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ est la projection orthogonale de X dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ sur le sous-espace des v.a. $\mathcal{F}$-mesurables.

Exercice 6. Donner (et démontrer) des versions “conditionnelles” des inégalités de Markov et de Chebychev.

Exemples

Exercice 7. Soit $X \in L^2$, de loi symétrique, i.e. X et $-X$ ont même loi. Calculer $\mathbb{E}[X^2|X]$ et $\mathbb{E}[X|X^2]$.

Exercice 8. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, intégrables et i.i.d. On pose $S_n = X_1+\cdots+X_n$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\mathbb{E}[X_i|S_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_1|S_n]$.
3. En déduire $\mathbb{E}[X_1|S_n, S_{n+1},\ldots]$.

Exercice 9. Soit $p \geq 1$ et soient $X, Y \in L^p$.

1. Montrer que $\|X+Y\|_p \geq \|X + \mathbb{E}[Y|X]\|_p$.
2. En déduire que, si X et Y sont indépendantes, alors $\|X+Y\|_p \geq \|X+\mathbb{E}(Y)\|_p$.

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires intégrables. Montrer l'équivalence des points suivants :

1. $\mathbb{E}[X|Y] \leq Y$ p.s. et $\mathbb{E}[Y|X] \leq X$ p.s.
2. $\mathbb{E}[X|Y] \geq Y$ p.s. et $\mathbb{E}[Y|X] \geq X$ p.s.
3. $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ p.s. et $\mathbb{E}[Y|X] = X$ p.s.
4. $X = Y$ p.s.

Conseil : Montrer d'abord l'équivalence entre 1. et 3., puis entre 2. et 3. Pour montrer l'équivalence avec 4., étudier d'abord le cas où X, Y sont de carrés intégrables, puis le cas où X, Y sont positives, puis le cas général.

Exercice 11. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de X_1 conditionnellement à X_1+X_2 (donc calculer $\mathbb{P}(X_1 = k|X_1+X_2 = n)$).
Conseil : On peut faire cela par calcul direct ou en utilisant l'exercice 5 de la feuille TD n^o 2.

Exercice 12. Soient X et Y deux variables aléatoires positives indépendantes de lois respectives de densités p_1 et p_2 par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note $S = X+Y$. Exprimer la loi de X conditionnellement à S en fonction de p. Expliciter dans le cas où $X \sim \Gamma(\alpha_1,\beta)$, $Y \sim \Gamma(\alpha_2,\beta)$ avec $\alpha_1,\alpha_2,\beta > 0$.

Exercice 13. Soient X, Y deux variables aléatoires gaussiennes centrées et indépendantes, de variances respectives σ_X^2 et σ_Y^2.

1. Donner la loi de $X+Y$ conditionnellement à X.
2. Donner la loi de X conditionnellement à $X+Y$.
   Conseil : trouver $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $X+Y \perp aX+bY$ et exprimer X en fonction de ces deux v.a.

Exercice 14 (Processus de Poisson homogène sur $\mathbb{R}_+$). Soient $Y_1, Y_2, \ldots$ des v.a. iid de loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. On pose $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. On définit la mesure aléatoire $\Pi = \sum_{n=1}^\infty \delta_{X_n}$, qu'on appelle *le processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité λ*.

1. Montrer l'égalité $\frac{1}{n!}\int_t^\infty x^n e^{-x}\,dx = e^{-t}\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$.
2. Montrer que $\Pi([0,t))$ suit la loi de Poisson de paramètre λt pour tout $t > 0$.
3. Soit $t > 0$. On pose $X_i^{(t)} = X_{\Pi([0,t))+i} - t$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}(X_1^{(t)} \geq y, \Pi([0,t)) = n) = e^{-\lambda y}\mathbb{P}(\Pi([0,t)) = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$. En déduire la loi jointe de $(X_1^{(t)}, \Pi([0,t)))$.
4. Montrer l'indépendance entre la suite $(X_k^{(t)} - X_{k-1}^{(t)})_{k\geq 2}$ et le vecteur $(X_1^{(t)}, \Pi([0,t)))$ et donner la loi de $(X_k^{(t)} - X_{k-1}^{(t)})_{k\geq 2}$.
5. En déduire que $(X_1^{(t)}, X_2^{(t)}, \ldots)$ est indépendante de $\Pi([0,t))$ et de même loi que $(X_1, X_2, \ldots)$.
6. Montrer que pour tous $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, $k \in \mathbb{N}$, les v.a. $\Pi([t_0,t_1)), \ldots, \Pi([t_{k-1},t_k))$ sont indépendantes et de lois respectives $\mathrm{Po}(\lambda(t_i - t_{i-1}))$, $i = 1,\ldots,k$.